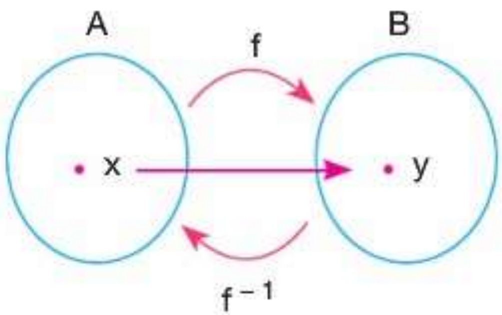
Ters Fonksiyon



Şemasında f ve f^{-1} gösterilmiştir. Yani $f : A \to B$ olmak üzere;

$$f^{-1} : B \to A$$

olur yani $f(x) = y$ ise $f^{-1}(y) = x$ olup

$$(f^{-1})^{-1} = f$$ olur.

Dikkat

f fonksiyonunun tersinin de bir fonksiyon olabilmesi için kesinlikle f birebir örten olmalıdır.

Dikkat

Birebir örten bir f(x) fonksiyonunun tersini bulabilmek için $f(x) = y$ olmak üzere fonksiyonda y yerine x, x yerine de yazıldıktan sonra y tek bırakılır.

Bulunan x değişkenine bağlı ifade $f^{-1}(x)$ olur.

f bire bir ve örten fonksiyon

$f(1) = 4$, $f(2) = 6$ ve $f(7) = 12$ veriliyor.

$f^{-1}(4)$, $f^{-1}(6)$ ve $f^{-1}(12)$ değerlerini bulalım.

Çözüm:

f bire bir olduğundan

$f(1) = 4$ ise $f^{-1}(4) = 1$

$f(2) = 6$ ise $f^{-1}(6) = 2$

$f(7) = 12$ ise $f^{-1}(12) = 7$ bulunur.

{1, 2, 3} kümesinden {10, 11, 12} kümesine aşağıdaki fonksiyonlar tanımlanıyor.

Bu fonksiyonlardan hangisinin ters fonksiyonu vardır?

A) {(1, 11), (2, 10), (3, 12)}

B) {(1,12), (2, 11), (3, 11)}

C) {(1, 10), (2, 10), (3, 11)}

D) {(1, 10), (2, 10), (3, 10)}

E) {(1, 12), (2, 11), (3, 12)

ÇÖZÜM

Birebir ve örten olduğundan dolayı sadece A olur.

Cevap A

$A = \{-2, -1, 0, 1\}$ olmak üzere

$f : A \to B$ birebir örten fonksiyonu

$$f(x) = 3x + 2$$

şeklinde tanımlıdır.

Buna göre, $f^{-1}(B)$ kümesi elemanları toplamı kaçtır?

ÇÖZÜM

f birebir örten olduğundan $f(A) = B$ dir ve $f^{-1}(B) = A$ dır.

O halde A nın elemanları toplamıda -2 olur.

$f : R - \{1\} \to R - \{3\}$ ve $y = f(x)$ fonksiyonu

$$3x - xy + y = 4$$

olduğuna göre, $f^{-1}(x)$ fonksiyonunu bulunuz.

ÇÖZÜM

x yerine y, y yerine x yazalım.

$3y - yx + x = 4$

$y(3 - x) = 4 - x$ ve $y = \dfrac{x - 4}{x - 3}$ O halde $\boxed{f^{-1}(x) = \dfrac{x - 4}{x - 3}}$

$f : (-\infty, 1) \to (3, \infty)$ olmak üzere

$$f(x) = x^2 - 2x + 4$$

olduğuna göre $f^{-1}(x)$ bulunuz.

ÇÖZÜM

$y = x^2 - 2x + 4 \Rightarrow y = (x-1)^2 + 3 \Rightarrow y - 3 = (x-1)^2$

$\sqrt{y-3} = \sqrt{(x-1)^2} \Rightarrow \sqrt{y-3} = |x-1|$

$\sqrt{y-3} = 1 - x$ (Çünkü tanım kümesi $(-\infty, 1)$)

$\sqrt{x-3} = 1 - y \Rightarrow y = 1 - \sqrt{x-3}$

$\boxed{f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x-3}}$

$f : R \longrightarrow R$

$f(x) = y = 3x - 4$ veriliyor. f^{-1} fonksiyonunu bulalım.

Çözüm:

$y = 3x - 4$ ifadesinde önce x i yalnız bırakalım.

Sonra bulunan ifadede y yerine x yazalım, x yerine $f^{-1}(x)$ yazalım.

$y = 3x - 4$

$y + 4 = 3x$

$\frac{y+4}{3} = x$ ise $f^{-1}(x) = \frac{x+4}{3}$ bulunur.

Dikkat

$f : A \to B$ olmak üzere

$$f(x) = ax + b$$

birebir örten fonksiyonunun tersi

$$\boxed{f^{-1}(x) = \frac{x - b}{a}}$$ olur.

Örneğin; $f(x) = 3x - 2$ ise $f^{-1}(x) = \dfrac{x + 2}{3}$

Dikkat

$f : A \to B$ olmak üzere

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

birebir örten fonksiyonunun tersi

$$\boxed{f^{-1}(x) = \frac{-dx + b}{cx - a}}$$ olur.

Örneğin;

$$f(x) = \frac{2x - 1}{4x + 3} \quad \text{ise} \quad f^{-1}(x) = \frac{-3x - 1}{4x - 2}$$

Aşağıdaki uygun şartlarda tanımlı birebir örten fonksiyonların tersini bulunuz.

I. $f(x) = 2x + 5$

II. $g(x) = \frac{x}{3} - 1$

III. $h(x) = 3 - 4x$

IV. $t(x) = 6 - x$

ÇÖZÜM

I. $f^{-1}(x) = \dfrac{x-5}{2}$

II. $g^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{\dfrac{1}{3}} = 3x + 3$

III. $h^{-1}(x) = \dfrac{3-x}{4}$

IV. $t^{-1}(x) = 6 - x$

Aşağıdaki uygun şartlarda tanımlı birebir örten fonksiyonların tersini bulunuz.

I. $f(x) = \dfrac{1 - 2x}{x + 3}$

II. $g(x) = \dfrac{6}{x + 2}$

ÇÖZÜM

I. $f^{-1}(x) = \dfrac{-3x+1}{x+2}$

II. $g^{-1}(x) = \dfrac{-2x+6}{x} = -2 + \dfrac{6}{x}$

$f(x) = 3x - 6$

$g(x) = (x - 2)^2$

fonksiyonları veriliyor.

Buna göre, $(gof^{-1})(x)$ aşağıdakilerden hangisi eşittir?

A) $\frac{3x^2}{2} - 1$ B) $(3x + 4)$ C) $x^2 - 4x + 2$

D) $\frac{x^2}{9}$ E) $(3x - 8)^2$

(2011/YGS)

ÇÖZÜM

$$f^{-1}(x) = \frac{x+6}{3}$$

$$(gof^{-1})(x) = \left(\frac{x+6}{3} - 2\right)^2 = \frac{x^2}{9}$$

Cevap D

Dikkat

$f : R - \{a\} \rightarrow R - \{b\}$ birebir örten fonksiyonu

$$f(x) = \frac{mx + n}{kx + r}$$

olsun.

Burada **a:** fonkiyonu tanımsız yapan değer olur.

b: fonksiyonun tersini tanımsız yapan değer olur.

Örneğin;

$f : R - \{3\} \rightarrow R - \{2\}$ olmak üzere f birebir örten fonksiyonu

$$f(x) = \frac{2x + 1}{x - 3} \quad \text{olur.}$$

$f : R - \{m\} \rightarrow R - \left\{\frac{n}{2}\right\}$ olmak üzere f birebir örten olmak üzere

$$f(x) = \frac{3 - x}{2x + 6}$$

olduğuna göre m + n kaçtır?

ÇÖZÜM

- $2x + 6 = 0$ ise $x = -3$ için tanımsız olur. Yani $\boxed{m = -3}$

- $f^{-1}(x) = \dfrac{-6x + 3}{2x + 1}$

  $2x + 1 = 0$ ise $x = -\dfrac{1}{2}$ için tanımsızdır.

  Yani $\dfrac{n}{2} = -\dfrac{1}{2}$ $\boxed{n = -1}$

  O halde $\boxed{m + n = -4}$

Ters Fonksiyonun Özellikleri

$f : A \to B$ birebir ve örten fonksiyon olmak üzere

1) $(f^{-1})^{-1} = f$

2) Her $a \in A$ için $f(a) = b$ oluyorsa $f^{-1}(b) = a$ olur.

3) $(fog)^{-1}(x) = (g^{-1}of^{-1})(x)$

$(fogoh)^{-1}(x) = (h^{-1}og^{-1}of^{-1})(x)$

4) I birim fonksiyon olmak üzere

$$f^{-1} of = fof^{-1} = I$$

Yani $(f^{-1}of)(x) = (fof^{-1})\ (x) = x$

5) I birim fonksiyon olmak üzere

$$f oI = Iof = f$$

Dikkat

$(fog)og^{-1} = f$

$f^{-1}o(fog) = g$

Dikkat

$f(g(x)) = h(x)$ ifadesinde $f(x)$'i elde etmek için $g^{-1}(x)$ fonksiyonu $h(x)$ te x yerine yazılır.

Örneğin; $f(\underbrace{2x - 1}) = 4x + 4$

Tersi; $\dfrac{x + 1}{2}$ olur.

$$f(x) = 4 \cdot \left(\frac{x + 1}{2}\right) + 4$$

$$f(x) = 2x + 6$$

$$f(x^2 + 5x) = x + 2$$

olmak üzere $f^{-1}(3)$ kaça eşittir?

ÇÖZÜM

$$f(x^2 + 5x) = x + 2$$

$$f^{-1}(x + 2) = x^2 + 5x$$

$$f^{-1}(3) = 1^2 + 5 = 6$$

$$\left[g \circ \left(f^{-1} \circ g\right)^{-1}\right](x) = 5x - 1$$

olduğuna göre $f^{-1}(19)$ kaça eşittir?

ÇÖZÜM

$$\left[go(g^{-1}of)\right](x) = 5x - 1$$

$$\left[\underbrace{(gog^{-1})}_{I}of\right](x) = 5x - 1 \Rightarrow f(x) = 5x - 1$$

$$f^{-1}(5x - 1) = x$$

$$f^{-1}(19) = 4$$

$$f^{-1}(2x - 5) = g(3x + 4)$$

olduğuna göre (fog)(7) kaça eşittir?

ÇÖZÜM

$f^{-1}(2x-5)=g(3x+4)$

$(f^{-1})^{-1}\big(g(3x+4)\big)=2x-5$

$f(g(3x+4))=2x-5$

$f\big(g(7)\big)=-3$ olur.

Gerçek sayılar kümesinde tanımlı f ve g fonksiyonları için

$$(gof)(x) = \frac{x+1}{2} \quad \text{ve} \quad f(x) = 3x + 1$$

olduğuna göre g(x) fonksiyonunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$f^{-1}(x) = \frac{x-1}{3}$ olup

$$\underbrace{\left[(gof)of^{-1}\right]}_{g}(x) = \frac{\frac{x-1}{3} + 1}{2} \quad \text{ve} \quad \boxed{g(x) = \frac{x+2}{6}}$$

$$f\left(\frac{x-3}{x+2}\right) = x - 1$$

olduğuna göre f(x) fonksiyonunu bulunuz.

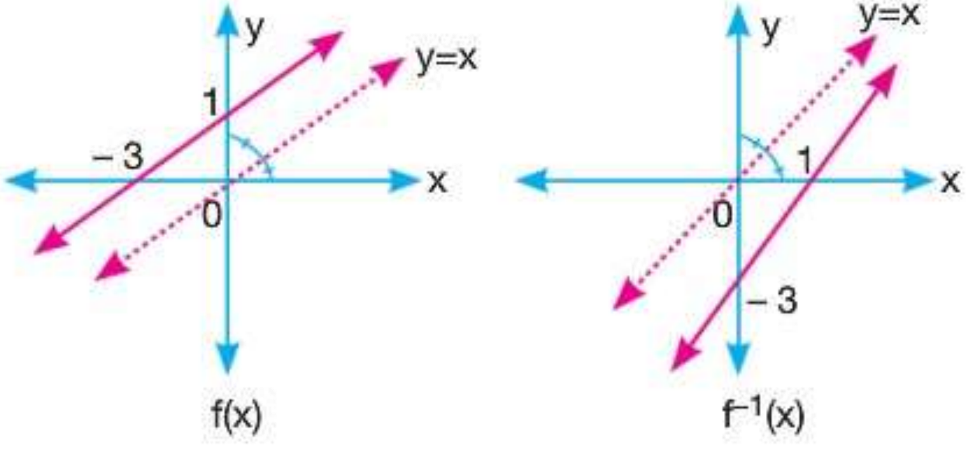
ÇÖZÜM

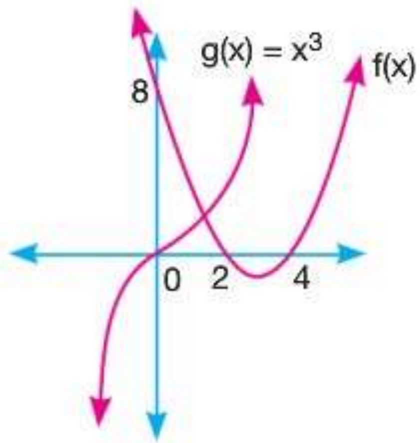
$\dfrac{x\ -3}{x+2}$ nin tersi $\dfrac{-2x-3}{x-1}$ olur.

$$f(x) = \frac{-2x-3}{x-1} - 1 = \frac{-3x-2}{x-1}$$

Bileşke ve Ters Fonksiyon Grafik İncelemesi

$f(x)$ ile $f^{-1}(x)$ fonksiyonlarının grafikleri $y = x$ doğrusuna göre simetriktir.





Yukarıdaki şekilde, f(x) fonksiyonu ile $g(x) = x^3$ fonksiyonun grafikleri verilmiştir.

Buna göre, $(fog^{-1}of)(0)$ değeri kaçtır?

A) –4 B) –2 C) 0 D) 4 E) 8

(2000/ÖSS)

ÇÖZÜM

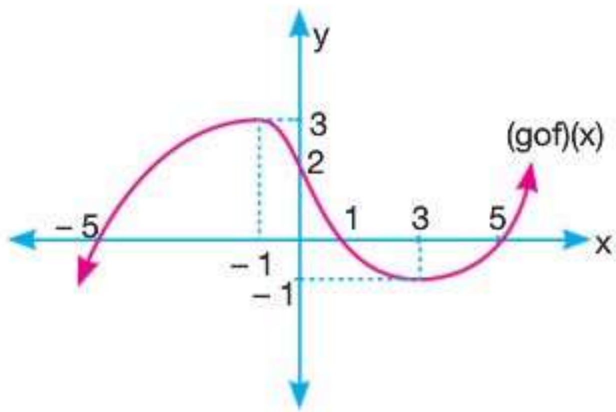
$f\left(g^{-1}(f(0))\right) = f\left(g^{-1}(8)\right)$

$(g(2) = 2^3 = 8$ olduğundan $g^{-1}(8) = 2$ dir.)

O halde $f\left(g^{-1}(8)\right) = f(2) = 0$

Cevap C

f(x) = x + 2 olmak üzere aşağıdaki şekilde (gof)(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Buna göre, $\dfrac{g(3) + g^{-1}(3)}{g(5)}$ ifadesinin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

$(gof)(x) = g\big(f(x)\big) = g(x + 2)$

$g(x + 2) = \boxed{g(3) = 0}$ (x = 1 için)

$g(x + 2) = \boxed{g(5) = -1}$ (x = 3 için)

$g^{-1}(3) = k$ ise $g(k) = 3$ olur.

$\downarrow$

$x + 2$ ($x = -1$ için $\boxed{k = 1}$ olur)

Yani sonuç $\dfrac{0 + 1}{-1} = -1$