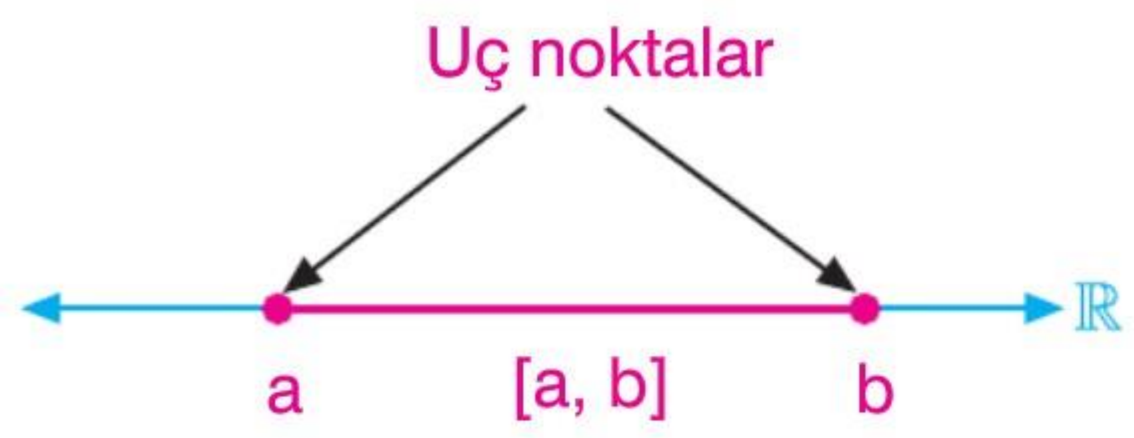
GERÇEK SAYILAR KÜMESİNDE ARALIK KAVRAMI

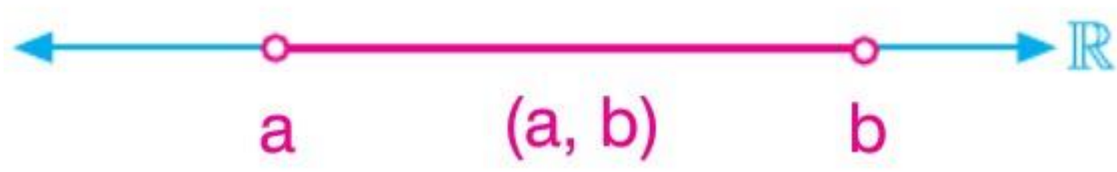
Sayı doğrusunda farklı iki noktanın aralarındaki tüm gerçek sayılardan oluşan alt kümeye aralık denir. Aralıklar verilen kümenin uç noktalarının kümeye dahil olup olmamasına bağlı olarak adlandırılır.

Kapalı Aralık ve Açık Aralık

a, b, x ∈ R ve a < b olsun. Uç noktaların (a ve b nin) aralığa dahil olduğu kümeler a ≤ x ≤ b **kapalı aralık** olarak adlandırılır ve [a, b] şeklinde gösterilir.



Uç noktaların (a ve b nin) aralığa dahil olmadığı kümeler $a < x < b$ **açık aralık** olarak adlandırılır ve (a, b) şeklinde gösterilir.



Yarı Açık Aralık

a, b, x ∈ R ve a< b olsun. Uç noktalardan birinin aralığa dahil olmadığı kümeler ($a < x \leq b$ ya da $a \leq x < b$) **yarı açık aralık** olarak adlandırılır ve (a, b] ya da [a, b) şeklinde gösterilir.

$(-\infty, +\infty)$ aralığı ile gerçek sayılar kümesi ifade edilir. Diğer bir ifadeyle, $R = (-\infty, +\infty)$ olur

Aşağıdaki eşitsizlikleri farklı gösterimlerle ifade edelim.

a. $-2 \leq x \leq 1 \quad (x \in \mathbb{R})$

b. $-3 < x < 0 \quad (x \in \mathbb{R})$

c. $-1 \leq x < 2 \quad (x \in \mathbb{R})$

d. $2 < x \leq 5 \quad (x \in \mathbb{R})$

Çözüm

a. $-2 \le x \le 1$ eşitsizliği -2 ile 1 dahil olmak üzere, bu iki sayı arasındaki tüm gerçek sayılar şeklinde ifade edilir.

Sayı doğrusunda gösterimi aşağıdaki gibi olur.

Küme gösterimi: $\{x : -2 \le x \le 1,\ x \in \mathbb{R}\}$

Aralık gösterimi: $[-2, 1]$

b. $-3 < x < 0$ eşitsizliği -3 ile 0 arasındaki tüm gerçek sayılar şeklinde ifade edilir.

Sayı doğrusunda gösterimi aşağıdaki gibi olur.

Küme gösterimi: $\{x : -3 < x < 0,\ x \in \mathbb{R}\}$

Aralık gösterimi: $(-3, 0)$

c. $-1 \leq x < 2$ eşitsizliği -1 e eşit veya -1 den büyük ve 2 den küçük tüm gerçek sayılar şeklinde ifade edilir.”

Sayı doğrusunda gösterimi aşağıdaki gibi olur.

Küme gösterimi: $\{x : -1 \leq x < 2, x \in \mathbb{R}\}$

Aralık gösterimi: $[-1, 2)$

d. $2 < x \leq 5$ eşitsizliği 2 den büyük ve 5’e eşit veya 5’ten küçük tüm gerçek sayılar şeklinde ifade edilir.”

Sayı doğrusunda gösterimi aşağıdaki gibi olur.

Küme gösterimi: $\{x : 2 < x \leq 5, x \in \mathbb{R}\}$

Aralık gösterimi: $(2, 5]$

$\{x : x \geq -1, x \in \mathbb{R}\}$ kümesine karşılık gelen aralığı sayı doğrusunda gösterelim.

Çözüm

Verilen küme bir aralıktaki uç noktalardan biri kapalı, diğeri sonsuz ise bu aralık ışın olarak adlandırılır.

$\{x : -1 \leq x < \infty, x \in \mathbb{R}\} = [-1, \infty)$ dur.

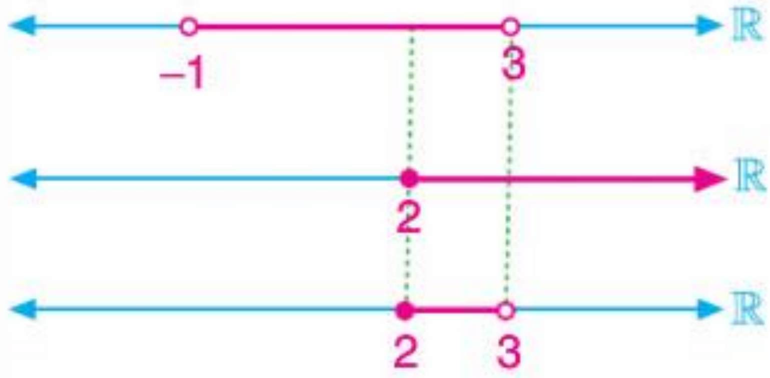
Sayı doğrusunda gösterimi aşağıdaki gibi olur.

$A = (-1, 3)$ ve $B = [2, \infty)$ kümeleri veriliyor.

Buna göre, $A \cap B$ kümesini sayı doğrusunda gösterip aralık ile gösterelim.

Çözüm

$A \cap B$ kümesi, $A = (-1, 3)$ ve $B = [2, \infty)$ kümelerinin kesişim kümesidir. Buna göre, grafik gösterimi aşağıdaki gibi olur.



Aralık gösterimi ise $(-1, 3) \cap [2, \infty) = [2, 3)$ tür.

$A = (1, 4)$ ve $B = [0, 3]$ olduğuna göre,

a) $A \cup B$ aralığını bulunuz.

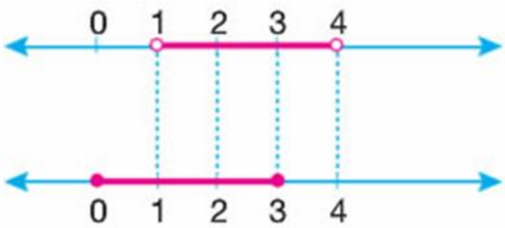
b) $A \cap B$ aralığını bulunuz.

c) $A \setminus B$ aralığını bulunuz.

Çözüm

$A = (1, 4) = \{x \mid 1 < x < 4, \quad x \in R\}$

$B = [0, 3] = \{x \mid 0 \leq x \leq 3, \quad x \in R\}$



a) $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ veya } x \in B, \ x \in R\}$
$= \{x \mid 0 \leq x < 4, \ x \in R\}$

b) $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ ve } x \in B, \ x \in R\}$
$= \{x \mid 1 < x \leq 3, \ x \in R\}$

c) $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ ve } x \notin B, \ x \in R\}$
$= \{x \mid 3 < x < 4, \ x \in R\}$ bulunur.

Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemler

a, b, c $\in$ R olsun,
Bir eşitliğin her iki yanına aynı sayı eklenip çıkarılabilir.
Bu durumda eşitlik değişmez.
a = b ise a+c = b+c ve a – c = b – c olur.
Bir eşitliğin her iki yanı sıfırdan farklı bir sayı ile çarpılabilir.
Bu durumda eşitlik değişmez.
a=b ise a.c = b.c olur.

a ve b gerçek sayı ve a sıfırdan farklı olmak üzere
$ax+b=0$ ifadesine **birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem** denir.

Denklemi sağlayan x değerine **denklemin kökü** ve bu değerlerin oluşturduğu kümeye de denklemin **çözüm kümesi** denir.

ax+b=0 denkleminde;

a sıfırdan farklı olduğunda denklemin **bir tek çözümü** vardır.

a ile b sıfır ise denklemin çözümü **sonsuz elemanlı** yani gerçek sayılardır.

a sıfır ve b sıfırdan farklı ise denklemin **çözümü yoktur** yani çözüm kümesi boş kümedir.

Örnek

$$(a + 1)x^2 + (b - 1)x - 2 = 0$$

denklemi birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem olduğuna göre, a ve b nin alabileceği değerleri bulalım.

Çözüm

$$(a + 1)x^2 + (b - 1)x - 2 = 0$$

denklemi birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem olduğuna göre, bu eşitlikte x^2 li terim olmamalı ve x in kat sayısı 0 dan farklı olmalıdır.

Öyleyse, $a + 1 = 0$ ve $b - 1 \neq 0$ dır.

$a + 1 = 0$ ise $a = -1$ dir.

$b - 1 \neq 0$ ise $b \neq 1$ dir.

Bu durumda, $a = -1$ dir. b ise 1 den farklı bir gerçek sayıdır.

Örnek

$$3x - 6 = 0$$

denkleminin çözüm kümesini $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{R}$ de bulalım.

Çözüm

$$3x - 6 = 0$$

$$3x - 6 + 6 = 0 + 6$$

$$3x = 6$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{6}{3}$$

$$x = 2$$

olur. 2 sayısı hem $\mathbb{N}$ nin hem $\mathbb{Z}$ nin hem de $\mathbb{R}$ nin bir elemanıdır. Bu durumda, $3x - 6 = 0$ denkleminin $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{R}$ de çözüm kümesi,

$Ç = \{2\}$ olur.

Örnek

$$2x + 1 = 6$$

denkleminin çözüm kümesini $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{R}$ de bulalım.

Çözüm

$2x + 1 = 6$ ise $2x = 5$

ise $x = \frac{5}{2}$ dir.

$\frac{5}{2}$ sayısı $\mathbb{N}$ nin ve $\mathbb{Z}$ nin bir elemanı değildir.

Denklemin $\mathbb{N}$ ve $\mathbb{Z}$ de çözüm kümesi $Ç = \varnothing$

$\mathbb{R}$ deki çözüm kümesi $Ç = \left\{\frac{5}{2}\right\}$ dir.

Örnek

$$3(x + 1) = x + 10$$

denklemin çözüm kümesini doğal sayılarda bulalım.

Çözüm

$$3(x+1)=x+10$$

$$3x+3=x+10$$

$$3x-x=10-3$$

$$2x=7$$

$$x=\frac{7}{2} \text{ olur.}$$

Bulduğumuz $\frac{7}{2}$ sayısı doğal sayı olmadığından, verilen denklemin çözüm kümesi,

$$Ç=\varnothing \text{ olur.}$$

Örnek

"Bir sayının 2 fazlasının 3 katı, sayının 20 eksiğine eşit olduğuna göre bu sayı kaçtır?"

sorusunun cevabını doğal sayılar ve gerçek sayılar kümesinde bulalım.

Çözüm

Bilinmeyen sayı x olsun. Buna göre istenen denklem,

$$3(x + 2) = x - 20$$

olur. Bu durumda,

$$\begin{aligned} 3(x + 2) &= x - 20 \\ 3x + 6 &= x - 20 \\ 3x - x &= -20 - 6 \\ 2x &= -26 \\ x &= -13 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Bulduğumuz -13 sayısı gerçek sayıdır ama doğal sayı değildir. Buna göre denklemin,

doğal sayılarda çözüm kümesi $= Ç = \varnothing$

gerçek sayılarda çözüm kümesi $= Ç = \{-13\}$ olur.

Örnek

$$\frac{8x+1}{3} = 2x+1$$

denkleminin çözüm kümesini rasyonel sayılarda ve tam sayılarda bulalım.

Çözüm

$$\frac{8x+1}{3} = 2x+1$$

$$8x+1 = 3(2x+1)$$

$$8x+1 = 6x+3$$

$$8x-6x = 3-1$$

$$2x = 2$$

$$x = 1 \text{ dir.}$$

Bulduğumuz 1 sayısı hem rasyonel sayıdır hem de tam sayıdır. Buna göre denklemin, hem rasyonel sayılarda hem de tam sayılarda çözüm kümesi,

$$Ç = \{1\} \text{ olur.}$$

Örnek

$$3x + 5 = 2(x + 3) + x - 1$$

denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$$3x + 5 = 2(x + 3) + x - 1$$

$$3x + 5 = 2x + 6 + x - 1$$

$$3x + 5 = 3x + 5$$

$$0 = 0$$

Bu eşitlik $0 \cdot x + 0 = 0$ biçiminde düşünülebilir.

Öyleyse, $a = 0$ ve $b = 0$ dır. (Durum 2)

Buna göre, verilen denklemin çözüm kümesi $Ç = \mathbb{R}$ dir.

Örnek

$$4(x + 5) = 6(x + 3) - 2(x + 1)$$

denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$$4(x + 5) = 6(x + 3) - 2(x + 1)$$

$$4x + 20 = 6x + 18 - 2x - 2$$

$$4x + 20 = 4x + 16$$

$$20 - 16 = 0$$

$$4 = 0$$

Bu eşitlik $0 \cdot x + 4 = 0$ biçiminde düşünülebilir.

Öyleyse, $a = 0$ ve $b \neq 0$ dır. (Durum 3)

Yani, $4 \neq 0$ dır. Diğer bir ifadeyle, $0 \cdot x + 4 = 0$ eşitliğini sağlayacak hiçbir x gerçek sayısı bulunamaz.

Buna göre, denklemin çözüm kümesi, $Ç = \emptyset$ dir.

Örnek

$$(2m - 2)x + 3n + 6 = 0$$

denklemi bütün gerçek sayılar için sağlandığına göre, $m + n$ değerini bulalım.

Çözüm

$$(2m - 2)x + 3n + 6 = 0$$

denkleminin çözüm kümesi gerçek sayılar kümesi olduğuna göre,

$$(2m - 2 = 0 \text{ ve } 3n + 6 = 0) \text{ olmalıdır.}$$

Bu durumda,

$2m - 2 = 0$ ise $m = 1$ dir.

$3n + 6 = 0$ ise $n = -2$ dir.

Buna göre, $m + n = 1 + (-2) = -1$ dir.

Örnek

$$5x + 3(x - 3) = 4(7 + 3x)$$

denklemin çözüm kümesini tam sayılarda bulalım:

Çözüm..

$$5x + 3(x - 3) = 4(7 + 3x)$$

$$5x + 3x - 9 = 28 + 12x$$

$$8x - 12x = 28 + 9$$

$$-4x = 37$$

$$x = \frac{-37}{4} \text{ olur.}$$

Bulduğumuz $\frac{-37}{4}$ sayısı tam sayı olmadığından,

Çözüm kümesi = Ç = $\varnothing$ olur.

Örnek

$$\frac{2x+1}{6}=\frac{2x-5}{5}$$

denkleminin çözüm kümesini rasyonel sayılarda ve tam sayılarda bulalım:

$$\frac{2x+1}{6}=\frac{2x-5}{5}$$

$$6(2x-5)=5(2x+1)$$

$$12x-30=10x+5$$

$$12x-10x=30+5$$

$$2x=35$$

$$x=\frac{35}{2} \text{ dir.}$$

Bulduğumuz $\frac{35}{2}$ sayısı rasyonel sayıdır ama tam sayı değil-

dir. Buna göre denklemin,

rasyonel sayılarda çözüm kümesi = $Ç=\left\{\frac{35}{2}\right\}$

tam sayılarda çözüm kümesi = $Ç=\varnothing$ olur.

Örnek

$$\frac{x}{6}-\frac{x}{4}=\frac{x}{3}-\frac{1}{2}$$

denkleminin çözüm kümesini rasyonel sayılarda ve tam sayılarda bulalım:

$$\frac{x}{6}-\frac{x}{4}=\frac{x}{3}-\frac{1}{2}$$

$$\underset{(2)}{\frac{x}{6}}-\underset{(3)}{\frac{x}{4}}=\underset{(4)}{\frac{x}{3}}-\underset{(6)}{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{2x-3x}{12}=\frac{4x-6}{12}$$

$$-x=4x-6$$

$$5x=6$$

$$x=\frac{6}{5} \text{ tir.}$$

Bulduğumuz $\frac{6}{5}$ sayısı rasyonel sayıdır ama tam sayı değildir.

Buna göre denklemin,

rasyonel sayılarda çözüm kümesi = $Ç=\left\{\frac{6}{5}\right\}$

tam sayılarda çözüm kümesi = $Ç = \varnothing$ olur.

$$\frac{2}{6-x}=\frac{1}{x-3}$$

denklemini sağlayan x değeri kaçtır?

$$\frac{2}{6-x} = \frac{1}{x-3}$$

$$2x - 6 = 6 - x$$

$$3x = 12$$

$$x = 4$$

$$\frac{1-(3-x)}{2}=\frac{5-(2x+1)}{3}$$

denklemini sağlayan x değeri kaçtır?

$$\frac{1-3+x}{2} = \frac{5-2x-1}{3}$$

$$\frac{x-2}{2} \times \frac{4-2x}{3}$$

$$3x - 6 = 8 - 4x$$

$$7x = 14$$

$$x = 2$$

$$\frac{3}{x+1}+\frac{1}{2x+2}=\frac{7}{4}$$

denklemini sağlayan x değeri kaçtır?

$$\underset{(4)}{\frac{3}{x+1}} + \underset{(2)}{\frac{1}{2x+2}} = \underset{(x+1)}{\frac{7}{4}}$$

$$12 + 2 = 7.(x+1)$$

$$x + 1 = 2$$

$$x = 1$$

$$1 + \cfrac{6}{1 + \cfrac{3}{x}} = 4$$

denklemini sağlayan x değeri kaçtır?

Çözüm

Bu tip sorularda payda eşitlemesi yapmak yerine x li terimi içeren ifade eşitlikte yalnız bırakılmaya çalışılır.

$$1+\underbrace{\frac{6}{1+\frac{3}{x}}}_{3}=4 \Rightarrow \frac{6}{\underbrace{1+\frac{3}{x}}_{2}}=3$$

$$\Rightarrow 2=1+\frac{3}{x}$$

$$\Rightarrow 1=\frac{3}{x} \Rightarrow x=3 \text{ bulunur.}$$

$$1 + \frac{6}{5 - \frac{1}{x-1}} = 2$$

denklemini sağlayan x değeri kaçtır?

$$1+\frac{6}{5-\frac{1}{x-1}}=2$$

$$5-\frac{1}{x-1}=6 \Rightarrow \frac{1}{x-1}=-1 \Rightarrow x-1=-1$$

$x=0$

$$\frac{12}{1+\frac{10}{1+\frac{3x}{2x+3}}}=2$$

denklemini sağlayan x değeri kaçtır?

$$\frac{12}{\underbrace{1+\underbrace{\frac{10}{\underbrace{1+\underbrace{\frac{3x}{2x+3}}_{1}}_{2}}}_{5}}_{6}} = 2$$

$$\frac{3x}{2x+3} = 1 \Rightarrow 3x = 2x + 3$$

$$x = 3$$

a bir gerçek sayı olmak üzere,

$$\frac{x-a}{2}+\frac{x+a}{3}=1$$

denkleminin kökü 2 olduğuna göre, a kaçtır?

Çözüm

Denklemi sağlayan x değerine kök denir.

Dolayısıyla $x = 2$ yazıldığında eşitlik sağlanır.

$$\frac{2-a}{\underset{(3)}{2}} + \frac{2+a}{\underset{(2)}{3}} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{6-3a}{6} + \frac{4+2a}{6} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{6-3a+4+2a}{6} = 1$$

$\Rightarrow -a + 10 = 6 \Rightarrow a = 4$ bulunur.

a ve b birer gerçek sayıdır.

$$ax - x = 3 + b$$

denkleminin x e bağlı çözüm kümesi sonsuz elemanlı olduğuna göre, $a + b$ toplamı kaçtır?

Çözüm

$a, b \in R$ olmak üzere,

$ax + b = 0$ denkleminde $a = b = 0$ $\Leftrightarrow$ çözüm kümesi sonsuz elemanlıdır yani Ç.K. $= R$ dir.

$$ax - x = 3 + b \Rightarrow (a-1)x = 3 + b$$

$$\Rightarrow \underbrace{(a-1)}_{0}x \underbrace{- b - 3}_{0} = 0$$

$$\Rightarrow a = 1 \text{ ve } b = -3$$

$$\Rightarrow a + b = -2 \text{ bulunur.}$$

m ve n birer gerçek sayıdır.

$$m.(2-x) = nx + 4$$

denkleminin x e bağlı çözüm kümesi sonsuz elemanlı olduğuna göre, n kaçtır?

$$2m - mx = nx + 4$$

$$\Rightarrow 2m = 4 \qquad -m = n$$

$$m = 2 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{n = -2}$$

a bir gerçek sayıdır.

$$ax + 1 = 2x - b$$

denkleminin çözüm kümesi boş küme olduğuna göre, aşağıda verilen ifadelerden hangisi doğrudur?

I. $a = 2$ ve $b \neq -1$ II. $a = 2$ ve $b = -1$

III. $a \neq 2$ ve $b \neq -1$ IV. $a \neq 2$ ve $b = -1$

V. $a = 2$ ve $b \neq 1$

Çözüm

$a, b \in R$ olmak üzere,

$ax + b = 0$ denkleminde $a = 0$ ve $b \neq 0$ $\Leftrightarrow$ çözüm kümesi boş kümedir.

$$ax + 1 = 2x - b \Rightarrow ax - 2x + 1 + b = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{(a-2)}_{=0}.x + \underbrace{b+1}_{\neq 0} = 0$$

$$\Rightarrow a = 2 \text{ ve } b \neq -1 \text{ bulunur.}$$

I. ifade doğrudur.

x değişkenine bağlı birinci dereceden bir bilinmeyenli

$$a.(x + 1) = 3x + 5$$

denkleminin çözüm kümesi tek elemanlı olduğuna göre, a aşağıdakilerden hangisi olamaz?

I. 0 II. 1 III. 2 IV. 3 V. 6

Çözüm

$a, b \in R$ olmak üzere, $ax + b = 0$ denkleminde

$a \neq 0 \Leftrightarrow$ çözüm kümesi tek elemanlıdır.

$$a.(x+1) = 3x + 5 \Rightarrow ax + a = 3x + 5$$

$$\Rightarrow ax - 3x + a - 5 = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{(a-3)}_{\neq 0}x + a - 5 = 0$$

$$\Rightarrow a - 3 \neq 0$$

$$\Rightarrow a \neq 3 \text{ bulunur.}$$

x değişkenine bağlı

$$2ax + x = 3.(x - 4)$$

denkleminin tek çözümü olduğuna göre, a kaç olamaz?

$$(2a + 1)x = 3x - 12$$

$$(2a - 2)x + 12 = 0$$

$$2a - 2 \neq 0$$

$$a \neq 1$$

Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizlikler

Eşitsizlik Nedir?

Bir niceliğin diğer bir nicelikten büyük veya küçük olma durumunu belirten ifadelere ise **eşitsizlik** denir.

Eşitsizliklerin ifade edilmesinde $>$, $\geq$, $<$, $\leq$ sembolleri kullanılır.

$ax + b > 0$, $ax + b \geq 0$, $ax + b < 0$, $ax + b \leq 0$ şeklinde ifade edilebilen eşitsizliklere **birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlikler** denir.

$2x - 3 > 5$, $x - 2 < 0$, $25 - a \leq 3a$ ifadeleri birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizliklere birer örnektir.

Denklemler ve eşitsizlikler, gerçek hayat durumlarının matematiksel olarak ifade edilmesinde ve incelenmesinde kullanılır.

Bir denklemde/eşitsizlikte değişkenin bazı değerleri eşitliği/eşitsizliği sağlayabilirken bazıları sağlamayabilir.

Denklemi/eşitsizliği sağlayan sayıların kümesine o denklemin/eşitsizliğin **çözüm kümesi** denir.

Eşitsizliğin özellikleri

a. Bir eşitsizliğin her iki yanına aynı sayı eklenirse ya da çıkarılırsa eşitsizliğin yönü değişmez.

➜ $a < b$ ise $a + c < b + c$ dir.

➜ $a < b$ ise $a - c < b - c$ dir.

Örneğin, $-2 < 3$ ise $-2 + 5 < 3 + 5$

ise $3 < 8$ dir.

$-2 < 3$ ise $-2 - 5 < 3 - 5$

ise $-7 < -2$ dir.

b. Bir eşitsizliğin her iki yanı pozitif bir sayı ile çarpılırsa eşitsizliğin yönü değişmez.

➜ $a < b$ ve $c > 0$ ise $a \cdot c < b \cdot c$ dir.

Örneğin, $-2 < 3$ ise $-2 \cdot 5 < 3 \cdot 5$

ise $-10 < 15$ tir.

c. Bir eşitsizliğin her iki yanı negatif bir sayı ile çarpılırsa veya bölünürse eşitsizlik yön değiştirir.

➜ $a < b$ ve $c < 0$ ise $a \cdot c > b \cdot c$ dir.

Örneğin, $-2 < 3$ ise $-2 \cdot (-5) > 3 \cdot (-5)$

ise $10 > -15$ tir.

d. Her a, b, c gerçek sayısı için,

➜ $(a < b$ ve $b < c)$ ise $a < c$ dir.

Örneğin, $(2 < 3$ ve $3 < 4)$ ise $2 < 4$ tür.

e. Her a, b, c, d gerçek sayısı için,

➜ $(a < b$ ve $c < d)$ ise $a + c < b + d$ dir.

Örneğin, $(2 < 5$ ve $3 < 4)$ ise $2 + 3 < 5 + 4$ tür.

f. Her a, b, c, d pozitif gerçek sayısı için,

➜ **$(a < b$ ve $c < d)$** ise **$a \cdot c < b \cdot d$** dir.

Örneğin, $(2 < 5$ ve $3 < 4)$ ise $2 \cdot 3 < 5 \cdot 4$ tür.

g. a ile b aynı işaretli olmak üzere,

$$a < b \text{ ise } \frac{1}{a} > \frac{1}{b} \text{ dir.}$$

Örneğin, $2 < 3$ ise $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$ tür.

h. 0 ile 1 arasındaki sayıların üssü büyütülürse sayı küçülür.

➜ **($0 < a < 1$ ve $n \in \mathbb{N}^+$)** ise $a^n \leq a$ dır.

Örneğin, $0 < \frac{1}{2} < 1$ için $\frac{1}{2} > \left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^3$ tür.

i. Negatif sayıların pozitif tek tam sayı kuvvetleri için aşağıdaki sıralama geçerlidir.

➜ (n, pozitif tek sayı ve $a < b < 0$) ise $a^n < b^n$ dir.

Örneğin, $-2 < -1$ ise $(-2)^3 < (-1)^3$

ise $-8 < -1$ dir.

Örnek

$16 < -8x + 5$

eşitsizliğinin çözüm kümesini,

a. **doğal sayılar kümesinde bulalım.**

b. **tam sayılar kümesinde bulalım.**

c. **reel sayılar kümesinde bulalım.**

Çözüm

Bir eşitsizliğin her tarafına aynı sayı ilave edilir (ya da çıkarılırsa) eşitsizliğin yönü aynı kalır.

Bir eşitsizliğin her iki yanı negatif bir sayı ile çarpılırsa veya bölünürse eşitsizlik yön değiştirir.

Buna göre,

$$16 < -8x+5$$

$$16-5 < -8x+5-5$$

$$11 < -8x$$

$$\frac{11}{-8} > \frac{-8x}{-8}$$

$$\frac{11}{-8} > x, \qquad \left(\frac{11}{-8} = 1,375\right)$$

$-1,375 > x$ tir. ...(★)

Bu durumda x, $-1,375$ den küçük herhangi bir sayı olabilir.

Buna göre,

a. $-1,375$ den küçük doğal sayı yoktur. Bu durumda verilen eşitsizliğin doğal sayılar kümesindeki çözüm kümesi, $Ç = \varnothing$ dir.

b. $-1,375$ den küçük tam sayılar $-2, -3, -4, \ldots$ tür. Bu durumda verilen eşitsizliğin tam sayılar kümesindeki çözüm kümesi,

$Ç = \{x : x < -1,375 \text{ ve } x \text{ tam sayı}\} = \{-2, -3, -4, \ldots\}$ dır.

c. Verilen eşitsizliğin reel sayılar kümesindeki çözüm kümesi,

$Ç = \{x : x < -1,375 \text{ ve } x \text{ reel sayı}\} = (\infty, -1,375)$ dır.

Örnek

a, b birer gerçek sayı ve

$$a^{15} < 0$$

$$a \cdot b^3 < 0$$

olduğuna göre, b için aşağıdakilerden hangisi <u>daima</u> doğrudur?

A) $b < -1$ B) $-3 < b < -1$ C) $b > 0$

D) $b > 1$ E) $-2 < b < -1$

Çözüm..

$a^{15} < 0$ ise $a < 0$ dır. ... (☆)

$a \cdot b^3 < 0$ ise $a \cdot b < 0$

ise a ile b zıt işaretlidir.

$a < 0$ olduğundan $b > 0$ dır.

Cevap **C**

Örnek

$$3x - 4 < 2x + 3$$

koşulunu sağlayan x doğal sayılarının kaç tane olduğunu bulalım:

Bir eşitsizliğin her tarafına aynı sayı ilave edilir (ya da çıkarılırsa) eşitsizliğin yönü aynı kalır. Buna göre,

$$3x - 4 < 2x + 3$$

$$3x - 4 - 2x < 2x + 3 - 2x$$

$$3x - 2x - 4 < 2x - 2x + 3$$

$$x - 4 < -0 + 3$$

$$x - 4 + 4 < 3 + 4$$

$$x < 7$$

Buna göre, x in alabileceği doğal sayı değerleri, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 olup yedi tanedir.

Örnek

$$\frac{5x-11}{4} < x+5$$

eşitsizliğinin çözüm kümesini (aralığını) **bulalım:**

Eşitsizliğin her iki tarafına aynı sayı eklenebilir (çıkarılabilir).

Eşitsizliğin her iki tarafı aynı pozitif bir sayı ile çarpılabilir (bölünebilir).

Toplama işleminin ve çarpma işleminin ters eleman ve etkisiz eleman özellikleri de göz önüne alınarak aşağıdaki işlemleri yapabiliriz.

$$\frac{5x-11}{4} < x+5$$

$$4 \cdot \frac{5x-11}{4} < 4 \cdot (x+5)$$

$$5x-11 < 4x+20$$

$$5x-4x < 20+11$$

$$x < 31$$

Buna göre verilen eşitsizliğin çözüm kümesi,

$(-\infty, 31)$ olur.

Örnek

$3 < x - 4 \leq 6$

olduğuna göre, x in alabileceği doğal sayı değerleri toplamı kaçtır?

A) 27 B) 28 C) 29 D) 30 E) 38

Çözüm..

Bir eşitsizliğin her tarafına aynı sayı ilave edilirse eşitsizliğin yönü aynı kalır. Buna göre,

$3 < x - 4 \leq 6$ ise, $3 + 4 < x - 4 + 4 \leq 6 + 4$

ise, $7 < x \leq 10$ olur. ... (☆)

(☆) koşulunu sağlayan doğal sayıların toplamı,

$8 + 9 + 10 = 27$ dir.

Cevap **A**

Örnek

$$-40 \leq -8x \leq -32$$

olduğuna göre, x in alabileceği tam sayı değerleri çarpımını bulalım:

Bir eşitsizliğin her tarafı negatif bir sayı ile bölünürse eşitsizlik yön değiştirir. Buna göre,

$$-40 \leq -8x \leq -32 \text{ ise, } \frac{-40}{-8} \geq \frac{-8x}{-8} \geq \frac{-32}{-8}$$

ise, $5 \geq x \geq 4$ tür.

Bu durumda, verilen koşulu sağlayan tam sayılar 4 ile 5 olup bu sayıların çarpımı, $4 \cdot 5 = 20$ dir.

$0 < x < y$ olmak üzere,

$z = \dfrac{3x + y}{x}$ olduğuna göre,

z nin <u>en küçük</u> tamsayı değeri kaçtır?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 9

ÇÖZÜM

$$z = \frac{3x + y}{x} = \frac{3x}{x} + \frac{y}{x} = 3 + \frac{y}{x}$$ elde edilir.

$0 < x < y$ olduğundan $\frac{y}{x} > 1$ dir.

$$z = 3 + \underbrace{\frac{y}{x}}_{\text{1 den büyük}}$$

Bu durumda z sayısı 4 ten büyük en az 5 olur.

Cevap : B

ÖRNEK - 4

a, b ve c reel sayılardır.

$a < b$ ve $a \cdot c > b \cdot c$ olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi kesinlikle doğrudur?

A) b pozitiftir.

B) a negatiftir.

C) c pozitiftir.

D) c negatiftir.

E) $a + b > 0$ dır.

Çözüm :

$a < b$ eşitsizliğinde her iki taraf c ile çarpıldığında $a \cdot c > b \cdot c$ eşitsizlik yön değiştirdiğinden c sayısı negatiftir.

Cevap : D

a ve b tamsayıdır.

$5 < a < 9$

$2 < b < 15$

olduğuna göre, 3a + 2b toplamı <u>en fazla</u> kaçtır?

A) 52 B) 60 C) 75 D) 80 E) 105

Çözüm

a ve b tamsayı olduğundan $3a + 2b$ en fazla,

$3\underset{\substack{\downarrow\\ 8}}{a} + 2\underset{\substack{\downarrow\\ 14}}{b} = 24 + 28 = 52$ bulunur.

Cevap : A

a ve b reel sayılardır.

$5 < a < 9$

$2 < b < 15$

olduğuna göre, 3a + 2b nin alabileceği <u>en büyük</u> tamsayı değeri kaçtır?

A) 50 B) 56 C) 60 D) 70 E) 71

Çözüm :

a ve b reel sayı olduğundan,

$5 < a < 9$ iken
$2 < b < 15$ iken

$$\begin{array}{r} 15 < 3a < 27 \\ + \quad 4 < 2b < 30 \\ \hline 19 < 3a + 2b < 57 \end{array}$$

$3a + 2b$ ifadesi 57 den küçük tamsayı olarak en fazla 56 olur.

Cevap : B

a, b ve c tamsayıdır.

$$2 < a < 8$$
$$-5 < b < 5$$
$$3 < c < 8$$

olduğuna göre, $2a + 5b - 3c$ <u>en az</u> kaçtır?

A) -44 B) -41 C) -35 D) -15 E) 10

ÇÖZÜM :

$2a + 5b - 3c$ ifadesinde a ve b ye en az, c nin katsayısı negatif olduğundan c ye en fazla değerler yazılırsa;

$2\underset{\substack{\downarrow\\3}}{a} + 5\underset{\substack{\downarrow\\-4}}{b} - 3\underset{\substack{\downarrow\\7}}{c} = 6 - 20 - 21 = -35$ bulunur.

Cevap : C

a, b ve c reel sayılardır.

$$2 < a < 10$$
$$-5 < b < 3$$
$$3 < c < 8$$

olduğuna göre, $2a + 5b - 3c$ nin alabileceği <u>en küçük</u> tamsayı değeri kaçtır?

A) -44 B) -41 C) -35 D) -15 E) 10

Çözüm

a, b ve c reel sayılar olduğundan,

$2 < a < 10$ iken $\qquad 4 < 2a < 20$

$-5 < b < 3$ iken $\qquad -25 < 5b < 15$

$3 < c < 8$ iken $\qquad -24 < -3c < -9$

$$-45 < 2a + 5b - 3c < 26$$

$2a + 5b - 3c$ ifadesi -45 ten büyük tamsayı olarak en az -44 olur.

Cevap : A

(2012 - YGS)

$-2 < x < 4$

olduğuna göre, $1 - x$ ifadesinin alabileceği <u>en büyük</u> tam sayı değeri kaçtır?

A) -3 B) -2 C) -1 D) 2 E) 3

ÇÖZÜM

$-2 < x < 4$

Her bir terimin işareti değişirse eşitsizlik yön değiştirir.

$2 > -x > -4$

Her bir terime 1 ekleyelim.

$3 > 1 - x > -3$

$1 - x$ ifadesinin -3 ve 3 arasındaki en büyük tamsayı değeri 2 olur.

x ve y tamsayılar olmak üzere,

$-10 < x < 7$

$2 < y < 5$

olduğuna göre, $x^2 + y^2$ nin alabileceği <u>en büyük</u> değer kaçtır?

A) 81 B) 97 C) 105 D) 117 E) 124

Çözüm

x ve y tamsayı olduğu için

$x = -9$ ve $y = 4$ alınırsa

$x^2 + y^2 = (-9)^2 + (4)^2 = 81 + 16 = 97$ bulunur.

Cevap : B

x ve y reel sayılar olmak üzere;

$$-10 < x < 7$$
$$2 < y < 5$$

olduğuna göre, $x^2 + y^2$ nin alabileceği en büyük tamsayı değeri kaçtır?

A) 84 B) 85 C) 120 D) 124 E) 135

ÇÖZÜM

x ve y reel sayı olduğundan

$$
\begin{array}{lll}
-10 < x < 7 & \text{iken} & 0 \le x^2 < 100 \\
2 < y < 5 & \text{iken} & 4 < y^2 < 25 \\
\hline
 & & 4 < x^2 + y^2 < 125
\end{array}
$$

$x^2 + y^2$ ifadesi 125 ten küçük en büyük tamsayı 124 bulunur.

Cevap : D

a ve b reel sayılardır.

$3 < a < 11$

$1 < b < 8$

olduğuna göre, a . b nin alabileceği en büyük ve en küçük tam sayı değerleri toplamı kaçtır?

A) 70 B) 81 C) 85 D) 88 E) 91

Çözüm :

En az $a \cdot b$

$$\begin{array}{ccc} a & . & b \\ \downarrow & & \downarrow \\ 1 & . & 3 \end{array}$$

$1 \cdot 3 = 3$ ten büyük olmak zorundadır.

$a \cdot b$ en az 4 olur.

en fazla $a \cdot b$

$$\begin{array}{ccc} a & . & b \\ \downarrow & & \downarrow \\ 11 & . & 8 \end{array}$$

$11 \cdot 8 = 88$ den küçük olmak zorundadır.

$a \cdot b$ en fazla 87 olur.

$4 + 87 = 91$ bulunur.

Cevap : E

a ve b reel sayılardır.

$2 < a < 5$ ve $b = 3a - 5$ olduğuna göre, b nin alabileceği kaç farklı tamsayı değeri vardır?

A) 4 B) 6 C) 7 D) 8 E) 12

ÇÖZÜM

$2 < a < 5$

$6 < 3a < 15$

$6 - 5 < 3a - 5 < 15 - 5$

$1 < 3a - 5 < 10$ $\quad$ ($3a - 5 = b$ olduğundan)

$1 < b < 10$

$$\underbrace{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9}_{8 \text{ tane}}$$

Cevap : D

Örnek

$$-1 < \frac{2-x}{3} \leq 4$$

eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm

x i yalnız bırakmak için gerekli işlemleri yapalım.

$3.(-1) < 3.\dfrac{2-x}{3} \leq 3.4$ (Her tarafı 3 ile çarptık.)

$-3 < 2 - x \leq 12$ (Her tarafa -2 ekleyelim.)

$-5 < -x \leq 10$ (Her tarafı -1 ile çarpalım.)

$5 > x \geq -10$ olur. (Negatif sayı ile çarpıldığında eşitsizlik yön değiştirir.)

$\Rightarrow$ Ç.K. $= [-10, 5)$ bulunur.

Örnek

$$2x - 1 < 3x + 2 \leq 2x + 5$$

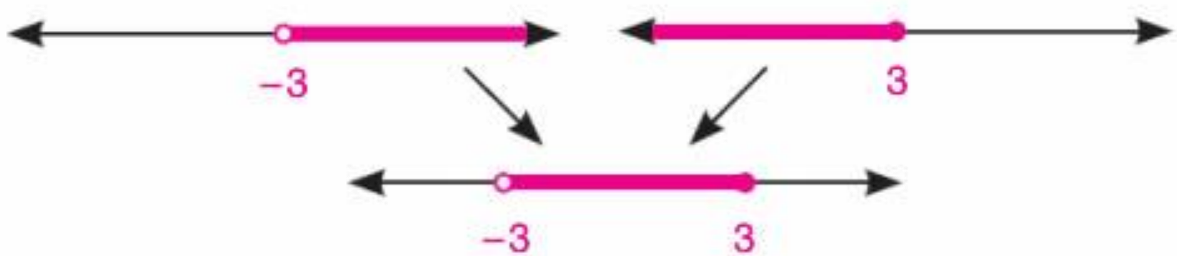
eşitsizlik sisteminin en geniş çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm

$a < b < c \Leftrightarrow a < b$ ve $b < c$ dir.

$$2x - 1 < 3x + 2 \leq 2x + 5$$

$2x - 1 < 3x + 2$	ve	$3x + 2 \leq 2x + 5$
$-1 - 2 < 3x - 2x$		$3x - 2x \leq 5 - 2$
$-3 < x$		$x \leq 3$



Ç.K. = (−3, 3] bulunur.

x ve y gerçek sayılardır.

$$-2 < x \leq 4$$

$$1 \leq y \leq 5$$

olduğuna göre, $2x - y$ ifadesinin değer aralığını bulunuz.

Çözüm

$$-2 < x \leq 4 \qquad , \quad 1 \leq y \leq 5$$

$$2.(-2) < 2x \leq 2.4 \,, \quad (-1).1 \geq (-1).y \geq (-1).5$$

$$-4 < 2x \leq 8 \qquad , \quad -5 \leq -y \leq -1$$

$$\begin{array}{rcccl} & -4 < & 2x & \leq 8 & \\ + & -5 \leq & -y & \leq -1 & \\ \hline & -9 < & 2x-y & \leq 7 & \Rightarrow (2x-y) \in (-9, 7) \text{ olur.} \end{array}$$

x ve y birer tam sayıdır.

$$-1 \leq x < 3$$

$$-4 < y \leq 2$$

olduğuna göre, $2x - 3y$ ifadesinin alabileceği en büyük değer kaçtır?

Çözüm

$-1 \leq x < 3$ ve $x \in Z$ ise $x = -1, 0, 1, 2$ olabilir.

$-4 < y \leq 2$ ve $y \in Z$ ise $y = -3, -2, -1, 0, 1, 2$ olabilir.

$2x - 3y$ ifadesinin en büyük değerini bulmak için x i büyük, y yi küçük seçmeliyiz.

Bu durumda $x = 2$ ve $y = -3$ alınırsa,

$$2x - 3y = 2.2 - 3.(-3)$$
$$= 13 \text{ bulunur.}$$

x ve y tam sayılardır.

$$-3 \leq x < 4$$

$$1 < y \leq 4$$

olduğuna göre, $x - 3y$ ifadesinin alabileceği en küçük değer kaçtır?

x ve y tam sayı olduğundan uygun sayılar seçelim $x = -3$ ve $y = 4$ seçilirse,

$x - 3y$ ifadesinin en küçük değeri $-3 - 3 . 4 = -15$ bulunur.

$x, y \in R$ ve $z \in Z$ dir.

$$-1 < x < 2$$

$$1 \leq y < 4$$

$$-2 < z < 3$$

olduğuna göre, $x + 2y - z$ ifadesinin alabileceği en büyük tam sayı değeri kaçtır?

öncelikle $x + 2y$ ifadesini oluşturalım.

$z \in \mathbb{Z}$ olduğundan uygun şekilde sayı seçmeliyiz.

$$\begin{array}{r} -1 < x < 2 \\ + \quad 2 \leq 2y < 8 \\ \hline 1 < x + 2y < 10 \end{array}$$

dur.

$x + 2y - z$ ifadesinin en büyük tam sayı değeri için

$x + 2y = 9$ ve $z = -1$ seçilerek $9 - (-1) = 10$ bulunur.

Örnek

$x, y \in R$ olmak üzere,

$$4 < y < 19$$

$$3x - y = 5$$

olduğuna göre, x sayısının en geniş değer aralığını bulunuz.

Çözüm

$3x - y = 5$ ise $y = 3x - 5$ dir.

$4 < y < 19 \Rightarrow 4 < 3x - 5 < 19$ olur.

Basit eşitsizliği çözersek,

$4 < 3x - 5 < 19$

$\Rightarrow 9 < 3x < 24$

$\Rightarrow 3 < x < 8$

$\Rightarrow x \in (3, 8)$ bulunur.

Örnek

x ve y gerçek sayılardır.

$$-1 < x \leq 2$$

$$-2 < y \leq 3$$

olduğuna göre, $x \cdot y$ çarpımının değer aralığını bulunuz.

Çözüm

$$-1 < x \leq 2$$

$$-2 < y \leq 3$$

Sınırlar birbirleri ile çarpılır ve

$$\left.\begin{aligned} &\neq -3 \\ &\neq -4 \\ &\neq 2 \\ &= 6 \end{aligned}\right\} \text{sınır değerleri bulunur.}$$

Bu sayıların en büyüğü üst sınır, en küçüğü alt sınır olarak seçilir. Bu durumda,

$$-4 < x.y \leq 6 \text{ bulunur.}$$

$$-1 < x < 2$$

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{y} < \frac{1}{3}$$

olduğuna göre, $x . y$ çarpımının alabileceği kaç farklı tam sayı değeri vardır?

İpucu: *a ve b aynı işaretli olmak üzere,* $a < b \Leftrightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$ *dır.*

$\frac{1}{4} < \frac{1}{y} < \frac{1}{3} \Rightarrow\ 3 < y < 4$ tür.

Buna göre, $(-1).3 = -3\ (\neq)$

$(-1).4 = -4\ (\neq)$

$2.3 = 6\ (\neq)$

$2.4 = 8\ (\neq)$

$\Rightarrow x.y \in (-4, 8)$ olup $-3, -2, ..., 7$ olmak üzere 11 farklı tam sayı değeri alabilir.

$1 < x \leq 3$

$6 < y \leq 12$

olduğuna göre, $\dfrac{y}{x}$ ifadesinin alabileceği kaç farklı tam sayı değeri vardır?

$1 < x \leq 3 \Rightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{1}{x} < 1$ dir. Buna göre,

$6 \cdot \frac{1}{3} = 2 (\neq)$

$6 . 1 = 6 (\neq)$

$12 \cdot \frac{1}{3} = 4 (=)$

$12 . 1 = 12 (\neq)$

$\Rightarrow \frac{y}{x} \in (2, 12)$ olup 3, 4, 5 ..., 11 olmak üzere, 9 farklı tam sayı değeri alabilir.

Örnek

$$-3 < x < 1$$

$$-6 < y \leq -2$$

olduğuna göre, $x^2 + y^2$ ifadesinin değer aralığını bulunuz.

Çözüm

$a, b \in R$ olmak üzere, $a < x < b$ eşitsizliği verilip, x^2 ifadesinin çözüm aralığının sınırları bulunurken aşağıdaki yöntem uygulanır.

i. $x = 0$ değerini alıyorsa,

üst sınır: $\max\{a^2, b^2\}$

alt sınır: 0 (sıfır dahil)

ii. $x = 0$ değerini almıyorsa,

üst sınır : $\max\{a^2, b^2\}$

alt sınır : $\min\{a^2, b^2\}$

$-3 < x < 1$

$0 \leq x^2 < 9$

$-6 < y \leq -2$

$4 \leq y^2 < 36$

$$\begin{array}{r} 0 \leq x^2 < 9 \\ + \quad 4 \leq y^2 < 36 \\ \hline 4 \leq x^2 + y^2 < 45 \end{array}$$

$\Rightarrow x^2 + y^2 \in [4, 45)$ bulunur.

x ve y gerçek sayılardır.

$$-5 \leq x \leq -2 \quad \text{ve} \quad -2 \leq y \leq 1$$

olduğuna göre, $x^2 - y^2$ ifadesi kaç farklı tam sayı değeri alabilir?

Çözüm

$-5 \leq x \leq -2$ ise $4 \leq x^2 \leq 25$ tir.

$-2 \leq y \leq 1$ ise $0 \leq y^2 \leq 4$ tür.

$$\begin{array}{r} 4 \leq x^2 \leq 25 \\ + \quad -4 \leq -y^2 \leq 0 \\ \hline 0 \leq x^2 - y^2 \leq 25 \end{array}$$ olur.

$x^2 - y^2$ nin alabileceği değerler : $\{0, 1, \ldots 25\}$ olmak üzere 26 tanedir.

$x \in R$ olmak üzere,

$$-2 < x \leq 3$$

olduğuna göre, $x^2 - 2x$ ifadesinin değer aralığını bulunuz.

Çözüm

Bu tarz sorularda x^2 ve $-2x$ in aralıklarına bakılmaz, ifade tek x ile yazılır.

$$x^2 - 2x = x^2 - 2x + 1 - 1$$

$$= (x-1)^2 - 1$$

$$-2 < x \le 3 \Rightarrow -3 < x - 1 \le 2$$

$$\Rightarrow 0 \le (x-1)^2 < 9$$

$$\Rightarrow -1 \le (x-1)^2 - 1 < 9 - 1$$

$$\Rightarrow -1 \le x^2 - 2x < 8$$

$$\Rightarrow (x^2 - 2x) \in [-1, 8) \text{ olur.}$$

Örnek

$x > y > 0$ olmak üzere,

$$z = \frac{3x + y}{x}$$

eşitliğini sağlayan z değerinin aralığını bulunuz.

Çözüm

$x > y > 0$ (her tarafı x ile bölelim.)

$$\Rightarrow \frac{x}{x} > \frac{y}{x} > \frac{0}{x}$$

$$\Rightarrow 1 > \frac{y}{x} > 0$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{y}{x} < 1$$

$$\Rightarrow 3 < 3 + \frac{y}{x} < 4$$

$$\Rightarrow 3 < \frac{3x + y}{x} < 4$$

$\Rightarrow 3 < z < 4$ bulunur.

Bir mal $2x + 10$ liraya alınıp, $3x - 40$ liraya satılmaktadır.

Bu malın satışından kâr edildiğine göre, x in alabileceği en küçük tam sayı değeri kaçtır?

Satıştan kâr edildiğine göre, satış fiyatı alış fiyatından büyük olmalıdır. Buna göre,

$2x + 10 < 3x - 40 \Rightarrow 50 < x$ olup x tam sayısı en az 51 olur.