Mutlak Değer Nedir?

Sayı doğrusu üzerindeki herhangi bir x reel sayısının başlangıç noktasına (orjin) olan uzaklığına x sayısının **mutlak değeri denir** ve **|x|** ile gösterilir.

Mutlak değer uzaklık belirttiğinden dolayı her zaman **pozitif bir gerçek sayı**ya eşittir.

Buradan anlaşılacağı üzere pozitif ifadelerin mutlak değeri kendisine, negatif ifadelerin mutlak değeri ise ters işaretlisine (başına eksi yazılır) eşittir.

Yine mutlak değer uzaklık belirttiği için alabileceği **en küçük değer sıfır**dır.

Örneğin;

$|-5| = 5$,

$|7| = 7$,

$|0| = 0$,

$|-12| = 12$ olur.

Bilgi: Mutlak değerin içindeki ifadenin değeri pozitif ise mutlak değerin dışına aynen çıkar, negatif ise önüne (-) alarak çıkar.

Bunu,

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \text{ ise} \\ 0, & x = 0 \text{ ise} \\ -x, & x < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde gösterebiliriz. Her x reel sayısı için **$|x| \geq 0$** olur.

Örneğin;

$|7| = 7$,

$|-4| = -(-4) = 4$,

$|\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1$ ($\sqrt{2} > 1$ olduğuna dikkat edin.)

$|\sqrt{3} - 2| = -(\sqrt{3} - 2) = -\sqrt{3} + 2$ ($\sqrt{3} < 2$ olduğuna dikkat edin.)

Mutlak Değerin Özellikleri

$$|x.y| = |x|.|y|$$

Örneğin;

- → $|12| = |3|.|4| = 3.4 = 12$
- → $|-5.2| = |-5|.|2| = 5.2 = 10$
- → $|(-2).(-4)| = |-2|.|-4| = 2.4 = 8$
- → $|3x - 3y| = |3.(x - y)| = |3|.|x - y| = 3.|x - y|$
- → $|-5x| = |-5|.|x| = 5.|x|$

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \quad (y \neq 0)$$

Örneğin;

➜ $\left|\frac{2}{3}\right| = \frac{|2|}{|3|} = \frac{2}{3}$

➜ $\left|\frac{-4}{5}\right| = \frac{|-4|}{|5|} = \frac{4}{5}$

➜ $\left|\frac{-3}{x}\right| = \frac{|-3|}{|x|} = \frac{3}{|x|}$

$$|x^n| = |x|^n \quad (n \in Z^+)$$

Örneğin;

- ➜ $|2^3| = |2|^3 = 2^3 = 8$
- ➜ $|(-3)^4| = |-3|^4 = 3^4 = 81$
- ➜ $|x^3| = |x|^3$
- ➜ $|(x - y)^2| = |x - y|^2$

$$|x| = |-x|$$

Örneğin;

- ➔ $|3| = |-3| = 3$
- ➔ $|\sqrt{2} - 3| = |3 - \sqrt{2}| = 3 - \sqrt{2}$
- ➔ $|x - y| = |y - x|$
- ➔ $|2x - 1| = |1 - 2x|$

Aşağıdaki işlemleri yapalım.

a. $\left|\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right|$

b. $\left|3^2-2^3\right|$

c. $\left|\sqrt{3}-2\right|+\left|1+\sqrt{3}\right|$

Çözüm

a. $\left|\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{1-2}{4}\right|=\left|-\frac{1}{4}\right|=\frac{1}{4}$

b. $\left|3^2-2^3\right|=\left|9-8\right|=\left|1\right|=1$

c. $\left|\sqrt{3}-2\right|+\left|1+\sqrt{3}\right|=-\left(\sqrt{3}-2\right)+\left(1+\sqrt{3}\right)$

$$=-\sqrt{3}+2+1+\sqrt{3}$$

$$=3$$

$x < 0 < y$ olmak üzere, $|x - y| + |x| - |y|$ ifadesinin eşitini bulalım.

Çözüm

$x < 0 < y$ ise $x - y < 0$ dır.

Buradan, $|x - y| = -(x - y)$

$x < 0$ olduğundan $|x| = -x$

$0 < y$ olduğundan $|y| = y$ dir. Buna göre,

$$\begin{aligned} |x - y| + |x| - |y| &= -x + y + (-x) - y \\ &= -2x \end{aligned}$$

x gerçek sayı ve $-1 < x < 3$ olmak üzere,

$|x + 1| + |x - 3|$ ifadesinin eşitini bulalım.

Çözüm

$-1 < x < 3$ ise $x + 1 > 0$ ve $x - 3 < 0$ dır.

$x + 1 > 0$ ise $|x + 1| = x + 1$ dir.

$x - 3 < 0$ ise $|x - 3| = -(x - 3) = 3 - x$ tir.

Buna göre,

$$|x + 1| + |x - 3| = x + 1 + (3 - x)$$

$$= 4 \text{ olur.}$$

x ile y arasındaki uzaklık $|x-y|$ veya $|y-x|$ ile ifade edilir.

$|-3-4|$ mutlak değerini hesaplayalım ve hangi noktalar arasındaki uzaklık olduğunu bulalım.

Çözüm

$|-3-4| = |-7| = 7$ dir.

$|-3-4| = |-3-(+4)|$ olduğundan verilen mutlak değeri A(–3) ile B(4) arasındaki uzaklıktır. Bu uzaklık ise 7 birimdir.

x negatif bir gerçek sayı olmak üzere, aşağıdaki ifadelerin eşitini bulalım.

a. $|2x| - |-x|$

b. $|1 - x| + |-3x|$

Çözüm

a. $x < 0$ ise $-x > 0$ dır. Buna göre, $|-x| = -x$ olur.

$|2x| = -2x$ ve $|-x| = -x$ tir.

Buna göre,

$|2x| - |-x| = -2x - (-x) = -2x + x = -x$ olur.

b. $x < 0$ iken $|1 - x|$ in eşitini bulmak için $x = -1$ yazalım.

$|1 - (-1)| = |2| = 2.$

Burada, $x = -1$ için mutlak değerin içi pozitif oldu. Bu nedenle, $|1 - x| = 1 - x$ tir.

$x < 0$ ise $|1 - x| = 1 - x$ ve $|-3x| = -3x$ tir.

Buna göre,

$|1 - x| + |-3x| = 1 - x + (-3x) = -4x + 1$ olur.

$|x|$ ifadesinin alabileceği en küçük değer 0 dır.

$|4 - 2x|$ ifadesini en küçük yapan x değerini bulalım.

Çözüm

$|4 - 2x|$ ifadesinin en küçük değeri 0 dır.

Öyleyse, $4 - 2x = 0$ ise $x = 2$ dir.

$$|x| + |y| = 0 \quad \text{ise} \quad x = 0 \quad \text{ve} \quad y = 0$$

$$|a - 2| + |b + 2a| = 0$$

denklemini sağlayan a ve b değerlerini bulalım.

Çözüm

Toplam 0 ise mutlak değer içindeki her bir ifade de 0 a eşit olmalıdır.

Öyleyse, $a - 2 = 0$ ise $a = 2$ dir.

$b + 2a = 0$ ise $b + 4 = 0$ dır. Buradan, $b = -4$ olur.

$x < 0$ olmak üzere, $|x| + |-x|$ ifadesinin eşitini bulalım.

Çözüm

$|x| + |-x| = |x| + |x| = 2|x|$ tir.

$x < 0$ olduğundan $|x| = -x$ tir.

Buna göre, $2|x| = -2x$ olur.

$$\frac{\left| |-3x| + 2| - x| \right|}{|5x|}$$

ifadesinin eşitini bulalım.

Çözüm

$$\frac{|-3x|+2|-x|}{|5x|}=\frac{|-3|\cdot|x|+2|x|}{|5|\cdot|x|}$$

$$=\frac{3|x|+2|x|}{5\cdot|x|}$$

$$=\frac{(3+2)|x|}{5\cdot|x|}$$

$$=1$$

$|x| = 5$ olduğuna göre, $A = |x + 3|$ ün alabileceği <u>en büyük</u> değeri bulalım.

X = 5 veya x= -5 olur.

$$A = |5 + 3| = |8| = 8 \; olur \; en \; \text{b}ü\text{y}ü\text{k} \; değer$$

Mutlak Değerli Denklemler

Mutlak değer içindeki ifade pozitif veya negatif olma durumuna göre mutlak değerli denklemlerin çözüm bulunur.

$c \geq 0$ olmak üzere, $|x| = c$ şeklindeki denklemleri sayı doğrusu üzerinde 0 noktasına olan uzaklığı c birim olan noktalar sağlar.

$|x| = c$ ise $x = -c$ veya $x = c$ dir.

Benzer şekilde,

$|ax + b| = c$ ise $ax + b = -c$ veya $ax + b = c$ dir.

$a > 0$ olmak üzere,
$|x| = a$ ise $x = a$ veya $x = -a$

Örneğin;

- $|x| = 4$ ise $x = 4$ veya $x = -4$
- $|x - 3| = 5$ ise $x - 3 = 5$ veya $x - 3 = -5$
  $x = 8$ veya $x = -2$
- $|x - 2| = 0$ ise $x - 2 = 0$
  $x = 2$
- $|x + 2| = -3$ ise $Ç.K = \varnothing$ ($-3 < 0$ olduğu için)

$$|x| = 3$$

denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$|x| = 3$ ise $x = -3$ veya $x = 3$ tür.

Buna göre, denklemin çözüm kümesi $ÇK = \{-3, 3\}$ olur.

$$|2x - 1| = 5$$

denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$|2x - 1| = 5$ ise $2x - 1 = 5$ veya $2x - 1 = -5$ tir.

$2x - 1 = 5$ ise $2x = 6$

$x = 3$

$2x - 1 = -5$ ise $2x = -4$

$x = -2$

Buna göre, denklemin çözüm kümesi $ÇK = \{-2, 3\}$ olur.

Sayı doğrusu üzerinde 2 noktasına olan uzaklığı 3 birim olan gerçek sayıları bulalım.

Çözüm

Sayı doğrusu üzerinde 2 noktasına olan uzaklığı 3 birim olan gerçek sayılar $|x-2| = 3$ denklemini sağlar.

$|x-2| = 3$ ise $x-2 = 3$ ve $x-2 = -3$ tür.

$x-2 = 3$ ise $x = 5$ tir.

$x-2 = -3$ ise $x = -1$ dir.

Buna göre, koşula uygun gerçek sayılar -1 ve 5 tir.

$$|2x| + |-4x| = 12$$

denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$|2x| + |-4x| = 12$ ise $2|x| + 4|x| = 12$

$$6|x| = 12$$

$$|x| = 2 \text{ dir.}$$

$|x| = 2$ ise $x = -2$ veya $x = 2$ dir.

Buna göre, denklemin çözüm kümesi $ÇK = \{-2, 2\}$ olur.

$$|2x - 4| + |3x - 6| = 15$$

denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$$|2(x-2)| + |3(x-2)| = 15$$

$$2|x-2| + 3|x-2| = 15$$

$$5|x-2| = 15$$

$$|x-2| = 3$$

$|x-2| = 3$ ise $x-2 = -3$ veya $x-2 = 3$ tür.

$x-2 = -3$ ise $x = -1$ dir.

$x-2 = 3$ ise $x = 5$ tir.

Buna göre, denklemin çözüm kümesi ÇK $= \{-1, 5\}$ olur.

$$\left|\,|x-1|-2\,\right|=3$$

eşitliğini sağlayan x değerlerinin toplamını bulalım.

Çözüm

$||x-1|-2| = 3$ ise $|x-1|-2 = -3$ veya $|x-1|-2 = 3$

$|x-1| = -1$ veya $|x-1| = 5$ tir.

$|x-1| = -1$ eşitliğini sağlayan x değeri yoktur, çünkü mutlak değerli bir eşitlik negatif olamaz.

$|x-1| = 5$ ise $x-1 = -5$ veya $x-1 = 5$ tir.

$x-1 = -5$ ise $x = -4$ tür.

$x-1 = 5$ ise $x = 6$ dır.

Buna göre, x in değerleri toplamı $(-4) + 6 = 2$ olur.

$|f(x)| = |g(x)|$ ise $f(x) = g(x)$ veya $f(x) = -g(x)$

$$|x - 1| = |x - 3|$$

denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$x - 1 = x - 3 \quad veya$	$x - 1 = -(x - 3) \quad olur$
$x - x = -3 + 1$	$x - 1 = -x + 3$
$0 = -2$	$x + x = 3 + 1$
$(böyle\ bir\ durum\ geçerli\ değildir.)$	$2x = 4 \implies x = 2 \implies Ç.K = \{2\} \quad olur.$

$$|x^2 - 9| = |x - 3|$$

eşitliğini sağlayan x değerlerinin çarpımını bulalım.

Çözüm

$|x^2 - 9| = |x - 3|$ ise $|x - 3|\,|x + 3| = |x - 3|$

$$|x - 3|\,|x + 3| - |x - 3| = 0$$

$$|x - 3|(|x + 3| - 1) = 0$$

$$|x - 3| = 0 \text{ veya } |x + 3| - 1 = 0$$

$$|x - 3| = 0 \text{ veya } |x + 3| = 1 \text{ dir.}$$

$|x - 3| = 0$ ise $x = 3$ tür.

$|x + 3| = 1$ ise $x + 3 = -1$ veya $x + 3 = 1$

$x + 3 = -1$ ise $x = -4$ tür.

$x + 3 = 1$ ise $x = -2$ dir.

Buna göre, x in alabileceği değerlerin çarpımı

$3 \cdot (-4) \cdot (-2) = 24$ olur.

$$2x + |x - 1| = 8$$

eşitliğini sağlayan x değerlerini bulalım.

$hem\ mutlak\ değerin\ içinde\ hem\ de\ mutlak\ değerin\ dışında\ x\ varsa$
$denklemi\ çözdükten\ sonra\ bulduğmuz\ x\ değerlerini\ \ denklemde$
$yerine\ yazıp\ sağlayıp\ sağlamadığı\ kontrol\ edilir$

$$|x-1| = 8-2x$$

$x-1 = 8-2x$
$x+2x = 8+1$
$3x = 9$
$x = 3$

$denklemde\ x = 3\ yazıp\ deneyelim$
2.3+$|3-1|$ = 6+2=8 sağlar

Eşitliği sağlayan değer 3 tür.

$x-1 = -(8-2x)$
$x-1 = -8+2x$
$-1+8 = 2x-x$
$x = 7$

$denklemde\ x = 7\ yazıp\ deneyelim$
2.7+$|7-1|$ = 14+6=20 sağlamaz

Mutlak Değerli Eşitsizlikler

$$a \geq 0 \; olmak \text{ üzere}$$
$$|x| \leq a \; ise \quad -a \leq x \leq a \quad \text{olur}$$

$$a \geq 0 \; olmak \text{ üzere}$$
$$|x| \geq a \; ise \;\; x \geq a \quad veya \quad -x \geq a \;\; \text{olur}$$

$$a < |x| < b \quad ise \;\; a < x < b \; veya \quad a < -x < b \;\; \text{olur.}$$

$$|x-2| \leq 3$$

eşitsizliğinin gerçek sayılar kümesinde çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$|x - 2| \leq 3$ ise $-3 \leq x - 2 \leq 3$

$$-3 + 2 \leq x - 2 + 2 \leq 3 + 2$$

$$-1 \leq x \leq 5$$

Buna göre, verilen eşitsizliğin çözüm kümesi $[-1, 5]$ olur.

$$|x-1| \geq 3$$

eşitsizliğinin gerçek sayılar kümesinde çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$$-(x-1) \geq 3 \;\; veya \quad x-1 \geq 3 \quad t\text{ü}r.$$

$x - 1 \leq -3$ ise $x \leq -2$ dir.

$x - 1 \geq 3$ ise $x \geq 4$ tür.

Buna göre, $ÇK = (-\infty, -2] \cup [4, \infty)$ olur.

$$2 \leq |x| \leq 4$$

eşitsizliğinin gerçek sayılarda çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$$2 \leq x \leq 4 \quad veya \quad 2 \leq -x \leq 4 \;\; \text{tür}.$$

$$2 \leq x \leq 4 \qquad \text{veya} \qquad -4 \leq x \leq -2$$

Buna göre, ÇK = $[-4, -2] \cup [2, 4]$ olur.

Sayı doğrusu üzerinde –2 noktasına olan uzaklığı 1 birimden küçük olan gerçek sayıları veren eşitsizliği yazalım.

Çözüm

Koşula uygun gerçek sayılardan biri x olsun.

Buna göre, x in –2 noktasına uzaklığı $|x-(-2)|$ dir.

Bu uzaklık 1 birimden küçük olacağından istenen eşitsizlik

$|x-(-2)| < 1$ veya $|x+2| < 1$ olur.

$$|1 - 2x| > 5$$

eşitsizliğinin gerçek sayılar kümesinde çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$$-(1-2x) > 5 \ \ veya \ \ \ 1-2x > 5 \ \ tir.$$

$$-(1-2x) > 5 \ \ ise$$

$$-1+2x > 5$$

$$2x > 6$$

$3 < x$ tür.

$1 - 2x > 5$ ise $-4 > 2x$

$-2 > x$ tir.

Buna göre, ÇK $= (-\infty, -2) \cup (3, \infty)$ olur.

$$3 \leq |2x - 1| < 5$$

eşitsizliğinin gerçek sayılarda çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$3 \leq |2x-1| < 5$ ise $3 \leq -(2x-1) < 5$ veya $3 \leq 2x-1 \leq 5$ tir.

$-5 \leq 2x-1 \leq -3$ ise $-4 \leq 2x \leq -2$

$-2 \leq x \leq -1$ dir.

$3 \leq 2x-1 \leq 5$ ise $4 \leq 2x \leq 6$

$2 \leq x \leq 3$ tür.

Buna göre, ÇK $= [-2, -1] \cup [2, 3]$ olur.

$$\left|\frac{1-3x}{-2}\right| < 5$$

eşitsizliğinin sağlayan x tam sayıları kaç tanedir?

Çözüm

$$\left|\frac{1-3x}{-2}\right| < 5 \text{ ise } \frac{|1-3x|}{|-2|} < 5$$

$$\frac{|1-3x|}{2} < 5$$

$$|1-3x| < 10$$

$$|1-3x| < 10 \text{ ise } \quad -10 < 1-3x < 10$$

$$-11 < -3x < 9$$

$$\frac{-11}{-3} > \frac{-3x}{-3} > \frac{9}{-3}$$

$$-3 < x < \frac{11}{3}$$

Buna göre, x in alabileceği tam sayı değerleri –2, –1, 0, 1, 2, 3 olup 6 tanedir.

$$|x - 1| < 2$$

olmak üzere, $2x - y = 3$ eşitliğini sağlayan y nin tam sayı değerleri toplamı kaçtır?

Çözüm

$2x - y = 3$ ise $y = 2x - 3$ tür.

$|x - 1| < 2$ ise $-2 < x - 1 < 2$

$-1 < x < 3$ tür.

$-1 < x < 3$ ise $-2 < 2x < 6$

$-2 - 3 < 2x - 3 < 6 - 3$

$-5 < 2x - 3 < 3$

$-5 < y < 3$

Öyleyse, y nin alabileceği tam sayı değerleri $-4, -3, -2, -1, 0, 1$ ve 2 dir.

y nin değerleri toplamı

$(-4) + (-3) + (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 = -7$ olur.

$|x| \leq |y| \Rightarrow x^2 \leq y^2$

$|x+3| < |x-1|$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$|x+3|<|x-1| \Rightarrow (x+3)^2<(x-1)^2$$
$$\Rightarrow x^2+6x+9<x^2-2x+1$$
$$\Rightarrow 8x+8<0$$
$$\Rightarrow x<-1 \text{ bulunur.}$$

Eşitsizliğin çözüm kümesi $Ç=(-\infty,-1)$ olur.

ALIŞTIRMALAR

$$|-5| + |2| - |-6|$$

işleminin sonucu kaçtır?

a = 1 olduğuna göre,

$$|2a - 1| + |3 - 5a|$$

ifadesinin değeri kaçtır?

$|-5| + |2| - |-6|$

$= -(-5) + 2 - (-(-6))$

$= 5 + 2 - 6$

$= 1$ bulunur.

$a = 1$ için, $|2a - 1| + |3 - 5a|$

$= |2 . 1 - 1| + |3 - 5 . 1|$

$= |1| + |-2|$

$= 1 + 2$

$= 3$ olur.

Örnek

$x < 0 < y < z$ olmak üzere,

$$|x - y| + |y + z| - |x - z|$$

ifadesinin eşitini bulunuz.

Çözüm

Mutlak değer içerisindeki ifade pozitif ise dışarıya aynen, negatif ise dışarıya önüne (–) alarak çıkar.

$$|x| = \begin{cases} x & , \ x > 0 \text{ ise} \\ 0 & , \ x = 0 \text{ ise} \\ -x & , \ x < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

$x - y$ ifadesi negatif olduğundan, $|x - y| = -(x - y)$,

$y + z$ ifadesi pozitif olduğundan, $|y + z| = y + z$,

$x - z$ ifadesi negatif olduğundan, $|x - z| = -(x - z)$ dir.

$$\begin{aligned} |x - y| + |y + z| - |x - z| &= -(x - y) + (y + z) - (-x + z) \\ &= -x + y + y + z + x - z \\ &= 2y \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

$x < y < 0$ olmak üzere,

$$|x| + |-y| + |x - y|$$

ifadesinin eşitini bulunuz.

$y < 0 \Rightarrow -y > 0$

$x < y \Rightarrow x - y < 0$ dır. Buna göre,

$|x| + |-y| + |x - y|$

$= -x - y - x + y$

$= -2x$ bulunur.

$0 < a < b < c$ olmak üzere,

$$|a - b| + |b - c| - |c - b + a|$$

ifadesinin eşitini bulunuz.

$a < b \Rightarrow a - b < 0$

$b < c \Rightarrow b - c < 0$

$\Rightarrow c - b > 0$ ve $a > 0 \Rightarrow c - b + a > 0$ dır.

Buna göre,

$|a - b| + |b - c| - |c - b + a|$

$= -a + b \cancel{- b} \cancel{+ c} \cancel{- c} \cancel{+ b} - a$

$= b - 2a$ bulunur.

$-2 < x < 5$ olduğuna göre,

$$|x-5|-|x+2|$$

ifadesinin eşitini bulunuz.

$-2 < x < 5 \Rightarrow x - 5 < 0$ ve $x + 2 > 0$ dır.

Buna göre,

$$
\begin{aligned}
|x-5| - |x+2| &= -x + 5 - x - 2 \\
&= -2x + 3 \text{ bulunur.}
\end{aligned}
$$

$$|2-\sqrt{5}|+|3-\sqrt{5}|$$

işleminin sonucu kaçtır?

$2-\sqrt{5}<0$ ve $3-\sqrt{5}>0$ olduğundan,

$$\begin{aligned} |2-\sqrt{5}|+|3-\sqrt{5}| &= -2+\sqrt{5}+3-\sqrt{5} \\ &= 1 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

$x < 0$ olmak üzere,

$$||x| - 2x + 4| + 3x$$

ifadesinin eşitini bulunuz.

Çözüm

$x < 0 \Rightarrow |x| = -x$ tir.

$$\begin{aligned} ||x| - 2x + 4| + 3x &= |-x - 2x + 4| + 3x \\ &= |-3x + 4| + 3x \qquad (-3x + 4 > 0) \\ &= -3x + 4 + 3x \\ &= 4 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

$x < 0$ olmak üzere,

$$\frac{|3x + |-x||}{x - |x|}$$

ifadesinin eşitini bulunuz.

Çözüm

$|-x| = |x|$ olduğundan,

$$\frac{|3x+|-x||}{x-|x|} = \frac{|3x+|x||}{x-(-x)} = \frac{|3x+(-x)|}{x+x} = \frac{|2x|}{2x} = \frac{-2x}{2x}$$

$= -1$ bulunur.

$x > 0$ olmak üzere,

$$|2x| - |-3x|$$

ifadesinin eşitini bulunuz.

$|x| = |-x|$ olduğuna göre,

$|2x| - |-3x| = |2x| - |3x|$

$= 2x - 3x$

$= -x$ bulunur.

$x < 0$ olmak üzere,

$$\frac{|-3x|}{x} - \frac{|5x|}{x}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

$|x| = |-x|$ olduğuna göre,

$$\frac{|-3x|}{x} - \frac{|5x|}{x} = \frac{|3x| - |5x|}{x} = -\frac{|2x|}{x} \quad (x < 0)$$

$$= \frac{2x}{x} = 2 \text{ dir.}$$

Örnek

$$|x - 2| + (y + 3)^2 + |5 - z| = 0$$

olduğuna göre, $x + y + z$ toplamı kaçtır?

Çözüm

Negatif değer alamayan en az iki ifadenin toplamı sıfır ise ifadelerin her biri sıfır olmalıdır. Yani

$|x| + |y| = 0$ ise $x = 0$ ve $y = 0$ dır.

$$|x-2| + (y+3)^2 + |5-z| = 0$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$x-2=0 \quad y+3=0 \quad 5-z=0$$

$\Rightarrow$ $x = 2$, $y = -3$ ve $z = 5$

$\Rightarrow$ $x + y + z = 2 + (-3) + 5 = 4$ bulunur.

$|3x - y|$ ifadesi en küçük değeri aldığında x in y türünden eşitini bulunuz.

$|3x - y|$ ifadesinin en küçük değeri 0 dır.

Buna göre,

$$
\begin{aligned}
|3x - y| = 0 &\Rightarrow 3x - y = 0 \\
&\Rightarrow 3x = y \\
&\Rightarrow x = \frac{y}{3} \text{ bulunur.}
\end{aligned}
$$

a ve b sıfırdan farklı sayılar olmak üzere,

$|a + 2b|$ ifadesini en küçük yapan a ve b değerleri için, $\dfrac{b - 2a}{b}$ ifadesinin değeri kaçtır?

$|a + 2b|$ ifadesinin en küçük değeri 0 dır.

Buna göre, $a + 2b = 0 \Rightarrow a = -2b$ tir.

$$\frac{b-2a}{b} = \frac{b-2\cdot(-2b)}{b} = \frac{5b}{b} = 5 \text{ dir.}$$

Örnek

$$\left|\frac{x+1}{2}\right| = 3$$

denklemini sağlayan x değerlerinin toplamı kaçtır?

Çözüm

$a \in R^+$ olmak üzere,

➢ $|x| = a \Rightarrow x = a$ ya da $x = -a$ dır.

➢ $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$, $(y \neq 0)$ ve $|x \, . \, y| = |x| . |y|$ dir.

$$\left|\frac{x+1}{2}\right| = 3 \Rightarrow \frac{|x+1|}{|2|} = 3$$

$$\Rightarrow |x+1| = 6$$

$$\Rightarrow x+1 = 6 \text{ veya } x+1 = -6$$

$$\Rightarrow x = 5 \text{ veya } x = -7$$

$$\Rightarrow 5 + (-7) = -2 \text{ bulunur.}$$

x ve y birer gerçek sayıdır.

$$|3x - 4| = 5 \text{ ve } |y + 3| = x$$

olduğuna göre, y nin <u>en küçük</u> değeri kaçtır?

$|3x-4| = 5 \Rightarrow 3x - 4 = 5$ veya $3x - 4 = -5$

$\Rightarrow x = 3$ veya $x = -\dfrac{1}{3}$ tür.

$|y+3| = x \Rightarrow x \geq 0$ olmalıdır. Buna göre,

$|y+3| = 3 \Rightarrow y + 3 = 3$ veya $y + 3 = -3$

$\Rightarrow y = 0$ veya $y = -6$ olduğundan

y nin en küçük değeri -6 bulunur.

Örnek

$$|2x-2|-|1-x|+|4x-4|=10$$

denklemini sağlayan x değerlerinin çarpımı kaçtır?

Çözüm

$|2x-2|-|1-x|+|4x-4|=10$

$|2(x-1)|-|(-1).(x-1)|+|4.(x-1)|=10$

$\Rightarrow |2|.|x-1|-|-1|.|x-1|+|4|.|x-1|=10$

$\Rightarrow 2|x-1|-|x-1|+4|x-1|=10$

$\Rightarrow 5|x-1|=10$

$\Rightarrow |x-1|=2 \Rightarrow x-1=2$ veya $x-1=-2$

$\Rightarrow x=3$ veya $x=-1$

$\Rightarrow 3.(-1)=-3$ bulunur.

Sayı doğrusu üzerinde $3x - 6$ ve 15 sayıları arasındaki uzaklık 12 birimdir.

Buna göre, x in alabileceği farklı değerlerin toplamı kaçtır?

$$|(3x-6)-15| = 12$$

$$\Rightarrow |3x-21| = 12$$

$$\Rightarrow 3x-21 = 12 \ \text{ veya } \ 3x-21 = -12$$

$$\Rightarrow \quad x = 11 \qquad \text{veya} \quad x = 3$$

olup toplamları $11 + 3 = 14$ bulunur.

Örnek

$$||x + 2| - 6| = 3$$

denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm

$$||x+2|-6|=3$$

$$|x+2|-6=3 \quad \text{veya} \quad |x+2|-6=-3$$

$$|x+2|=9 \quad \text{veya} \quad |x+2|=3$$

$$x+2=9 \;,\; x+2=-9 \quad \text{veya} \quad x+2=3 \;,\; x+2=-3$$

$$x=7, \quad x=-11 \quad \text{veya} \quad x=1 \;,\; x=-5$$

Ç. K. $=\{-11, -5, 1, 7\}$ olur.

Örnek

$$|2x + 3| = |9 - x|$$

denklemini sağlayan x değerlerinin toplamı kaçtır?

Çözüm

$|x| = |y| \Rightarrow x = y$ veya $x = -y$ dir.

I. Yol

$$|2x+3| = |9-x| \Rightarrow 2x+3 = 9-x \text{ veya } 2x+3 = x-9$$

$$\Rightarrow 3x = 6 \qquad\qquad x = -12$$

$$\Rightarrow x = 2 \qquad\qquad x = -12 \text{ dir.}$$

$$\Rightarrow 2 + (-12) = -10 \text{ bulunur.}$$

II. Yol

Her iki tarafta da sadece mutlak değer varsa iki tarafın karesi alınarak soru çözülebilir.

$$|x + 2| \,.\, |x - 2| = x + 2$$

denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm

$|x+2| \,.\, |x-2| = x+2$ eşitliğinin sol tarafı iki mutlak değerin çarpımı olduğundan sağ tarafı negatif olamaz.

Buna göre, $x + 2 \geq 0$ dır.

$$|x+2|\,|x-2| = (x+2)$$

$$\Rightarrow \quad (x+2)\,|x-2| = (x+2)$$

$$\Rightarrow \quad (x+2)\,|x-2| - (x+2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (x+2)\,(|x-2|-1|) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = -2 \quad \text{veya} \quad |x-2| = 1$$

$$\Rightarrow \quad x = -2\,, \quad x-2 = 1\,, \quad x-2 = -1$$

$$\Rightarrow \quad x = -2\,, \qquad x = 3\,, \qquad x = 1 \quad \text{dir.}$$

$$\Rightarrow \quad \text{Ç. K.} = \{-2, 1, 3\} \text{ bulunur.}$$

$$|x - 1| + 4 = 2x$$

denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm

Mutlak değerin dışında x li terim varsa aşağıdaki yöntemle soru çözülebilir. Önce mutlak değerli ifadenin kökü bulunur.

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ (kritik nokta)

$x \geq 1$ için, $|x - 1| = x - 1$ dir.

$|x - 1| + 4 = 2x \Rightarrow x - 1 + 4 = 2x \Rightarrow x = 3$

$x < 1$ için, $|x - 1| = -x + 1$ dir.

$|x - 1| + 4 = 2x \Rightarrow -x + 1 + 4 = 2x \Rightarrow x = \dfrac{5}{3}$

$x < 1$ için bulunan $x = \dfrac{5}{3}$ değeri denklemi sağlamadığı için çözüm kümesine dahil edilemez.

Buna göre, Ç. K. $= \{3\}$ bulunur.

Örnek

$$|x - 1| = x - 1$$

$$|x - 5| = 5 - x$$

eşitliklerini sağlayan x tam sayılarının toplamı kaçtır?

Çözüm

$|x| = x \Rightarrow x \geq 0$ ve $|x| = -x \Rightarrow x \leq 0$

$|x-1| = x-1 \Rightarrow x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$

$|x-5| = 5-x \Rightarrow x-5 \leq 0 \Rightarrow x \leq 5$

$1 \leq x \leq 5 \Rightarrow x = 1, 2, 3, 4, 5$

$\Rightarrow 1+2+3+4+5 = 15$ bulunur.

Örnek

$$|2x + 2| - |x - 1| = 3$$

denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm

$2x + 2 = 0 \Rightarrow x = -1$

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

-1 ve 1 kritik noktalardır. Bu noktalara göre tablo yapılarak çözüme ulaşılabilir.

x	$-\infty$	-1	1	∞
	Bu aralıkta $2x + 2$ ve $x - 1$ negatiftir. Buna göre, $-2x - 2 + x - 1 = 3$ $-x = 6 \Rightarrow x = -6$ $-6 \in (-\infty, -1)$	Bu aralıkta $2x + 2$ pozitif, $x - 1$ negatiftir. Buna göre, $2x + 2 + x - 1 = 3$ $\Rightarrow 3x = 2$ $\Rightarrow x = \frac{2}{3}$ $\frac{2}{3} \in [-1, 1)$	Bu aralıkta $2x + 2$ ve $x - 1$ pozitiftir. Buna göre, $2x + 2 - x + 1 = 3$ $x = 0$ $0 \notin (1, \infty)$	

$\Rightarrow$ Ç.K. $= \left\{-6, \frac{2}{3}\right\}$ bulunur.

$$|x - 3| - |x + 2| = 3$$

denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$ ve $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$ kritik noktalarıdır.

$-\infty$ ile -2 arası	-2 ile 3 arası	3 ile $+\infty$ arası
Bu aralıkta	Bu aralıkta	Bu aralıkta
$x-3<0,\ x+2<0$ dır.	$x-3<0,\ x+2>0$ dır.	$x-3>0,\ x+2>0$ dır.
$-x+3+x+2=3$	$-x+3-x-2=3$	$(x-3)-(x+2)=3$
$5=3$	$-2x=2$	$-5=3$
$\varnothing$	$x=-1$	$\varnothing$
	$-1 \in (-2, 3)$	

Ç.K $= \{-1\}$ bulunur.

Örnek

$$|x+4|+|x+1|+|x-3|$$

ifadesinin en küçük değeri kaçtır?

Çözüm

Mutlak değer fonksiyonlarının en büyük ve en küçük değerleri bulunurken mutlak değerlerin içini sıfır yapan x değerleri bulunur. Daha sonra bulunan değerler fonksiyonda yerine yazılır. Elde edilen sayılar karşılaştırılarak istenilen değer bulunur.

$x = -4$ için $|-4 + 4| + |-4 + 1| + |-4 - 3| = 10$

$x = -1$ için $|-1 + 4| + |-1 + 1| + |-1 - 3| = 7$

$x = 3$ için $|3 + 4| + |3 + 1| + |3 - 3| = 11$

Buna göre, verilen ifadenin alabileceği en küçük değer 7 dir.

$$\frac{90}{|x+3|+|x-1|+|x-2|}$$

ifadesinin alabileceği en büyük değer kaçtır?

$\dfrac{90}{|x+3|+|x-1|+|x-2|}$ ifadesinin en büyük değeri için paydanın en küçük değeri alması gerekir.

$x+3=0 \Rightarrow x=-3$ için, $|-3+3|+|-3-1|+|-3-2|=9$

$x-1=0 \Rightarrow x=1$ için, $|1+3|+|1-1|+|1-2|=5$

$x-2=0 \Rightarrow x=2$ için, $|2+3|+|2-1|+|2-2|=6$

$\Rightarrow \dfrac{90}{5}=18$ bulunur.

Örnek

$$|x-3|-|x+4|$$

ifadesinin alabileceği en büyük değer kaçtır?

Çözüm

Mutlak değerin içini sıfır yapan değerler 3 ve −4 tür.

Bu noktaları verilen ifadede yerine yazarsak,

$x = 3$ için $|3 - 3| - |3 + 4| = |0| - |7| = 0 - 7 = -7$

$x = -4$ için $|-4 - 3| - |-4 + 4| = |-7| - |0| = 7$ dir.

Buna göre, verilen ifadenin alabileceği en büyük değer 7 dir.

$$|x| - |x - 5|$$

ifadesinin alabileceği kaç farklı tam sayı değeri vardır?

$x = 0 \Rightarrow |0| - |0 - 5| = -5$

$x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$ için $|5| + |5 - 5| = 5$ olup

$|x| - |x - 5| \in [-5, 5]$ tir.

Bu aralıkta 11 tam sayı değeri vardır.

$$\frac{|x+2|-3}{|x|} \leq 0$$

eşitsizliğini sağlayan kaç farklı x tam sayı değeri vardır?

$$\frac{|x+2|-3}{|x|} \leq 0 \Rightarrow |x+2|-3 \leq 0 \text{ ve } |x| \neq 0 \text{ dır.}$$

$$|x+2|-3 \leq 0 \Rightarrow |x+2| \leq 3 \quad (|x| < a \Rightarrow -a < x < a)$$

$$\Rightarrow -3 \leq x+2 \leq 3$$

$$\Rightarrow -5 \leq x \leq 1 \text{ dir.}$$

Buna göre, $x \in [-5\,,\,1] - \{0\}$ olup 6 farklı tam sayı değeri alabilir.

$$|1-x|-|2x-2|<-3$$

eşitsizliğini sağlayan x tam sayı değerlerinin toplamı kaçtır?

$|1-x|-|2(x-1)|<-3$

$\Rightarrow -|x-1|<-3$

$\Rightarrow |x-1|>3$ tür.

$|x|>a \Rightarrow x>a$ veya $x<-a$ dır.

$|x-1|>3 \Rightarrow x-1>3$ veya $x-1<-3$

$\Rightarrow x>4$ veya $x<-2$ dir.

O hâlde $x \in (-\infty, -2) \cup (4, \infty)$ olup x tam sayıları toplamı -7 bulunur.

$$\left|\frac{-5}{x+1}\right| < 2$$

eşitsizliğini sağlayan en büyük negatif x tam sayı değeri kaçtır?

$$\left|\frac{-5}{x+1}\right| < 2 \Rightarrow \frac{5}{|x+1|} < 2 \Rightarrow \frac{|x+1|}{5} > \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow |x+1| > \frac{5}{2} \text{ dir.}$$

$|x| > a \Rightarrow x > a$ veya $x < -a$ dır.

$$|x+1| > \frac{5}{2} \Rightarrow x+1 > \frac{5}{2} \text{ veya } x+1 < -\frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow x > \frac{3}{2} \text{ veya } x < -\frac{7}{2} \text{ olup}$$

en büyük negatif x tam sayısı -4 tür.

$$-12 < x < 28$$

eşitsizliğinin mutlak değerli ifadesini bulunuz.

Çözüm

$-12 < x < 28$ eşitsizliğinin her tarafından a sayısını çıkaralım.

$-12 - a < x - a < 28 - a$

$\Rightarrow \quad -(-12 - a) = 28 - a$ olmalıdır.

$\Rightarrow \quad 12 + a = 28 - a \Rightarrow 2a = 16 \Rightarrow a = 8$ bulunur.

Buna göre, $-12 < x < 28$ eşitsizliği

$-12 - 8 < x - 8 < 28 - 8$

$\Rightarrow -20 < x - 8 < 20$

$\Rightarrow |x - 8| < 20$ şeklinde ifade edilebilir.