

Gerçek Katsayılı Bir Polinomun Çarpanlara Ayrılması

$P(x) = Q(x) \cdot R(x)$ ise $Q(x)$ ve $R(x)$ polinomlarına $P(x)$ polinomunun **çarpanları** denir.

Bir polinomu iki ya da daha çok polinomun çarpımı biçiminde yazma işlemine bu polinomu **çarpanlarına ayırma işlemi** denir.

En az birinci dereceden iki polinomun çarpımı biçiminde yazılamayan ve sabit olmayan polinomlara **indirgenmeyen polinom** denir.

Başkatsayısı 1 olan ve indirgenmeyen polinomlara **asal polinom** denir.

→ $P(x) = x^2 + 1$, $Q(x) = 5x$, $R(x) = 3x + 2$ indirgenemeyen polinomlardır.

→ $P(x) = x + 4$, $Q(x) = x - 1$, $R(x) = x - 3$ asal polinomlardır.

Çarpanlara Ayırma Yöntemleri

1) Ortak çarpan Parantezine Alma

Bir polinomun ya da bir cebirsel ifadenin terimlerinde ortak çarpanlar varsa ortak çarpanların en küçük üstlerinin çarpımı, bu polinomun her teriminin ortak çarpanıdır. Şimdi örneklerle gösterelim.

Aşağıdaki ifadeleri çarpanlara ayıralım.

a) $x^3 - x^2 = x^2(x - 1)$

b) $3x^3 - 39x = 3x(x^2 - 13)$

c) $20ax^2y - 12a^2xy^3 = 4axy(5x - 3ay^2)$

d) $m(x - y) + n(y - x) = m(x - y) - n(x - y) = (x - y)(m - n)$

e) $3x^n - 15x^{2n} - 18x^{3n} = 3x^n(1 - 5x^n - 6x^{2n})$

f) $18xy^2 - 24x^3y^2 = 6xy^2(3 - 4x^2)$

g) $x(m - n) - m + n = x(m - n) - (m - n) = (m - n)(x - 1)$

h) $3x^{-5} - 12x^{-3} = 3x^{-5}(1 - 4x^2)$

2) Gruplandırılarak Çarpanlara Ayırma

Verilen ifadenin her teriminde ortak çarpan yoksa ortak çarpanı olan terimler kendi aralarında gruplandırılarak ortak çarpan parantezine alınır.

ÖRNEK

Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayıralım.

a) $x^3 + x^2 - x - 1$

b) $m^4 + m^2 + 4m^2 + 4$

c) $a^2 - b - a + a.b$

d) $a(1 + b^2) - b(1 + a^2)$

e) $a.b + b.c + a.c + c^2$

f) $8.a.y - 6.b.y + 16.a.c - 12.b.c$

Çözüm:

$$\begin{aligned}\text{a) } x^3 + x^2 - x - 1 &= x^2(\underline{x+1}) - (\underline{x+1}) = (x+1)(x^2-1) \\ &= (x+1)(x-1)(x+1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b) } m^4 + m^2 + 4m^2 + 4 &= m^2(\underline{m^2+1}) + 4(\underline{m^2+1}) \\ &= (m^2+1)(m^2+4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{c) } a^2 - b - a + a.b &= a^2 - a - b + a.b = a(\underline{a-1}) + b(\underline{a-1}) \\ &= (a-1)(a+b)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{d) } a(1+b^2) - b(1+a^2) &= a + a.b^2 - b - a^2b \\ &= \underline{a-b} - a.b(\underline{a-b}) = (a-b)(1-a.b)\end{aligned}$$

$$\text{e) } a.b + b.c + a.c + c^2 = b(a+c) + c(a+c) = (a+c)(b+c)$$

$$\begin{aligned}\text{f) } 8.a.y - 6.b.y + 16.a.c - 12.b.c &= 2y(\underline{4a-3b}) + 4c(\underline{4a-3b}) \\ &= (4a-3b)(2y+4c)\end{aligned}$$

ÖRNEK

$m - n = 12$ ve $n + k = 5$ olduğuna göre,
 $m.n + m.k - n^2 - n.k$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned}m.n + m.k - n^2 - n.k &= m(n + k) - n(n + k) \\&= (n + k)(m - n) \\&= 5 \cdot 12 = 60 \\&\text{bulunur.}\end{aligned}$$

ÖRNEK

$30^x - 5^x + 6^{x+1} - 6$ ifadesini çarpanlarına ayıralım.

Çözüm:

$$30^x - 5^x + 6^{x+1} - 6 = 5^x(6^x - 1) + 6(6^x - 1) = (6^x - 1)(5^x + 6)$$

bulunur.

ÖRNEK

$$m - n = 13$$

$$m + k = 5$$

olduğuna göre, $m \cdot n + m \cdot k - n^2 - n \cdot k$ ifadesinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$$-1 / \quad m - n = 13$$

$$+ m + k = 5$$

$$\hline n + k = -8 \text{ olur}$$

$$m \cdot n + m \cdot k - n^2 - n \cdot k = m \cdot (n + k) - n \cdot (n + k)$$

$$= (n + k) \cdot (m - n)$$

$$= -8 \cdot 13$$

$$= -104 \text{ bulunur.}$$



- Bir eşitlik, eşitlikte bulunan değişkenin her değeri için sağlanıyorsa bu eşitlik, bir ÖZDEŞLİKTir.
- Eşitlik değişkenin özel değeri ya da özel değerleri için sağlanıyorsa bu eşitlik bir DENKLEMdir.

$(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$ eşitliği bir özdeşliktir.

$x^2 - 3x = 10$ eşitliği bir denklemdir.

3) Tam Kare Özdeşliği

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = (x - y)^2 + 2xy$$

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$$

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz \text{ dir.}$$

Aşağıda açılımı yapılan ifadeleri inceleyiniz.

$$\Rightarrow (x + 1)^2 = x^2 + 2.x.1 + 1^2 = x^2 + 2x + 1$$

$$\Rightarrow (2x + y)^2 = (2x)^2 + 2.2x.y + y^2 = 4x^2 + 4xy + y^2$$

$$\Rightarrow (2a - 3b)^2 = (2a)^2 - 2.2a.3b + (3b)^2 = 4a^2 - 12ab + 9b^2$$

$$\Rightarrow \left(a - \frac{3}{a}\right)^2 = a^2 - 2.a.\frac{3}{a} + \left(\frac{3}{a}\right)^2 = a^2 - 6 + \frac{9}{a^2}$$

Aşağıda çarpanlarına ayrılmış olan ifadeleri inceleyiniz.

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 = x^2 - 2.x.2 + 2^2 = (x - 2)^2$$

$$\Rightarrow 9x^2 - 6xy + y^2 = (3x - y)^2$$

$$\Rightarrow -m^2 + 8m - 16 = -(m^2 - 8m + 16) = -(m - 4)^2$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow x^2 - y^2 + 2y - 1 &= x^2 - (y^2 - 2y + 1) = x^2 - (y - 1)^2 \\ &= [x - (y - 1)].[x + (y - 1)] \\ &= (x - y + 1)(x + y - 1)\end{aligned}$$

ÖRNEK

Aşağıdaki ifadelerin özdeşlerini yazalım.

a) $(x - 3)^2$

b) $(2x + 5)^2$

c) $\left(3x - \frac{1}{x}\right)^2$

Çözüm:

a) $(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$

b) $(2x + 5)^2 = 4x^2 + 20x + 25$

c) $\left(3x - \frac{1}{x}\right)^2 = 9x^2 - 6 + \frac{1}{x^2}$

ÖRNEK

$x^2 + 5x + k$ ifadesi bir tam kare ise k gerçekte sayısını bulalım.

Çözüm:

$$x^2 + 5x + k = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{5}{2} + (\sqrt{k})^2 \text{ şeklinde yazılır.}$$

$$= \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = x^2 + 5x + \frac{25}{4}$$

O halde $k = \frac{25}{4}$ bulunur.

ÖRNEK

$a + b - c = 8$ ve $ab - ac - bc = 28$ ise $a^2 + b^2 + c^2$ değerini bulalım.

Çözüm:

$$(a + b - c)^2 = (8)^2 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc = 64$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2(\underbrace{ab - ac - bc}_{28}) = 64$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 56 = 64$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 8 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$3x + \frac{1}{x} = 8$ olduğuna göre, $9x^2 + \frac{1}{x^2}$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm:

$$3x + \frac{1}{x} = 8 \Rightarrow \left(3x + \frac{1}{x}\right)^2 = (8)^2$$

$$9x^2 + 2 \cdot 3x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 64$$

$$9x^2 + 6 + \frac{1}{x^2} = 64$$

$$9x^2 + \frac{1}{x^2} = 58 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$$a - b + c = 10$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 20$$

olduğuna göre, $-ab + ac - bc$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm:

$$a - b + c = 10 \Rightarrow (a - b + c)^2 = (10)^2$$

$$a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc = 100$$

$$20 + 2(-ab + ac - bc) = 100$$

$$2(-ab + ac - bc) = 80$$

$$-ab + ac - bc = 40$$

ÖRNEK

$a - \frac{5}{a+1} = 10$ olduğuna göre, $(a+1)^2 + \frac{25}{(a+1)^2}$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm:

$$a - \frac{5}{a+1} = 10 \Rightarrow a + 1 - \frac{5}{a+1} = 11$$

$$\left(a + 1 - \frac{5}{a+1}\right)^2 = (11)^2$$

$$(a+1)^2 - 2(a+1) \cdot \frac{5}{a+1} + \frac{25}{(a+1)^2} = 121$$

$$(a+1)^2 + \frac{25}{(a+1)^2} = 131 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$x^2 - 8x + 5 = 0$ olduğuna göre, $x^2 + \frac{25}{x^2}$ toplamının değerini bulalım.

Çözüm:

$$x^2 - 8x + 5 = 0 \Rightarrow x^2 + 5 = 8x \text{ ve } x + \frac{5}{x} = 8 \text{ (Her tarafı } x \text{ e böldük)}$$

$$\left(x + \frac{5}{x}\right)^2 = (8)^2 \Rightarrow x^2 + 2 \cdot \cancel{x} \cdot \frac{5}{\cancel{x}} + \frac{25}{x^2} = 64$$

$$x^2 + 10 + \frac{25}{x^2} = 64 \Rightarrow x^2 + \frac{25}{x^2} = 54 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$A = x^2 - 12x + 45$ olduğuna göre, A nın alabileceği en küçük değeri bulalım.

Çözüm:

$$A = x^2 - 2 \cdot 6x + 36 + 9$$

$A = (x - 6)^2 + 9$ ifadesinde $x = 6$ yazılırsa $(x - 6)^2$ en küçük değerini alır.

$$x = 6 \Rightarrow A = (6 - 6)^2 + 9$$

$A = 9$ bulunur.

ÖRNEK

$A = 9x^2 - 6x + y^2 + 4y + 13$ ifadesinin en küçük değerini bulalım.

Çözüm:

$$A = 9x^2 - 6x + y^2 + 4y + 13$$

$$A = 9x^2 - 6x + 1 + y^2 + 4y + 4 + 8$$

$$A = (3x - 1)^2 + (y + 2)^2 + 8$$

$$x = \frac{1}{3} \text{ ve } y = -2 \text{ yazalım} \Rightarrow A = (0)^2 + (0)^2 + 8$$

$A = 8$ bulunur.

ÖRNEK

$x^2 - 4x + 2 = 0$ ise $x^4 + \frac{16}{x^4}$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm:

$$x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 + 2 = 4x \Rightarrow x + \frac{2}{x} = 4 \text{ olur.}$$

$$\left(x + \frac{2}{x}\right)^2 = (4)^2 \Rightarrow x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} = 16$$

$$\left(x^2 + \frac{4}{x^2}\right) = 12 \Rightarrow \left(x^2 + \frac{4}{x^2}\right)^2 = (12)^2$$

$$x^4 + 2 \cdot x^2 \cdot \frac{4}{x^2} + \frac{16}{x^4} = 144$$

$$x^4 + \frac{16}{x^4} = 136 \text{ olmalıdır.}$$

ÖRNEK

$\sqrt{\frac{9}{25} - \frac{3}{2} + \frac{25}{16}}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{9}{25} - \frac{3}{2} + \frac{25}{16}} &= \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 - 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{4} + \left(\frac{5}{4}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{3}{5} - \frac{5}{4}\right)^2} \\ &= \left|\frac{3}{5} - \frac{5}{4}\right| = \frac{13}{20} \quad \text{bulunur.}\end{aligned}$$

4) İki Kare Farkı Özdeşliği

İki terimin toplam ve farkının çarpımı ile elde edilen ifade, iki kare farkıdır.

$$x^2 - y^2 = (x - y) \cdot (x + y) \text{ ile gösterilir.}$$

Aşağıdaki ifadeler iki kare farkı özdeşliğinden yararlanılarak çarpanlarına ayrılmıştır. İnceleyiniz.

$$\Rightarrow x^2 - 1 = x^2 - 1^2 = (x - 1)(x + 1)$$

$$\Rightarrow x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x - 3)(x + 3)$$

$$\Rightarrow x^2 - 4y^2 = x^2 - (2y)^2 = (x - 2y)(x + 2y)$$

$$\Rightarrow 4a^2 - 9b^2 = (2a)^2 - (3b)^2 = (2a - 3b)(2a + 3b)$$

$$\Rightarrow 2a^2 - 8b^2 = 2(a^2 - 4b^2) = 2(a - 2b)(a + 2b)$$

$$\Rightarrow 54^2 - 46^2 = (54 - 46)(54 + 46) = 8 \cdot 100 = 800$$

ÖRNEK

Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayıralım.

a) $x^2 - 36y^2$

b) $\frac{25}{81} - \frac{4}{x^2}$

c) $(2a - b)^2 - (a + 2b)^2$

Çözüm:

$$\text{a) } x^2 - 36y^2 = (x - 6y)(x + 6y)$$

$$\text{b) } \frac{25}{81} - \frac{4}{x^2} = \left(\frac{5}{9} - \frac{2}{x}\right)\left(\frac{5}{9} + \frac{2}{x}\right)$$

$$\begin{aligned}\text{c) } (2a - b)^2 - (a + 2b)^2 &= (2a - b - a - 2b)(2a - b + a + 2b) \\ &= (a - 3b)(3a + b)\end{aligned}$$

ÖRNEK

a ve b doğal sayı olmak üzere, $a^2 - b^2 = 17$ olduğuna göre,
 $a^2 + b^2$ toplamı kaçtır?

Çözüm:

$$a^2 - b^2 = \underbrace{(a - b)}_1 \underbrace{(a + b)}_{17} = 17$$

$$a + b = 17$$

$$\begin{array}{r} + a - b = 1 \\ \hline \end{array}$$

$$2a = 18 \quad \text{ise} \quad a = 9$$

$$b = 8$$

$$\text{ise} \quad a^2 + b^2 = 9^2 + 8^2$$

$$= 81 + 64$$

$$= 145 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$$\frac{2^{12} - 2^8}{(2^2 + 1)(2^2 - 1)} \text{ işleminin sonucunu bulalım.}$$

Çözüm:

$$\frac{2^{12} - 2^8}{(2^2 + 1)(2^2 - 1)} = \frac{2^8(2^4 - 1)}{(2^2 + 1)(2^2 - 1)} = \frac{2^8(\overset{1}{2^2+1})(\overset{1}{2^2-1})}{(\overset{1}{2^2+1})(\overset{1}{2^2-1})} = 2^8 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$\sqrt{2010 \cdot 2024 + 49}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$= \sqrt{(2017 - 7)(2017 + 7) + 49}$$

$$= \sqrt{2017^2 - 49 + 49}$$

$$= 2017 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$\frac{2017^2 - 2010^2}{2016^2 - 2009^2}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\frac{2017^2 - 2010^2}{2016^2 - 2009^2} = \frac{(2017 - 2010)(2017 + 2010)}{(2016 - 2009)(2016 + 2009)} = \frac{7 \cdot 4027}{7 \cdot 4025}$$
$$= \frac{4027}{4025} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$m - n = n - k = 6$ olduğuna göre, $m^2 + k^2 - 2n^2$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$$\begin{array}{r} m - n = 6 \\ + \quad n - k = 6 \\ \hline m - k = 12 \end{array}$$

$$\begin{aligned} &= m^2 + k^2 - n^2 - n^2 = m^2 - n^2 + k^2 - n^2 \\ &= (m - n)(m + n) + (k - n)(k + n) \\ &= 6(m + n) - 6(k + n) \\ &= 6m + 6n - 6k - 6n \\ &= 6(m - k) = 6 \cdot 12 = 72 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

ÖRNEK

$3^{\frac{1}{8}} = a + 1$ olduğuna göre, $\frac{3^{\frac{1}{2}} - 1}{3^{\frac{1}{4}} - 1}$ ifadesinin a cinsinden değerini bulalım.

Çözüm:

$$\left(\frac{1}{3^8}\right)^2 = (a + 1)^2$$

$$3^{\frac{1}{4}} = a^2 + 2a + 1$$

$$\frac{3^{\frac{1}{2}} - 1}{3^{\frac{1}{4}} - 1} = \frac{\left(\frac{1}{3^4}\right)^2 - 1}{\frac{1}{3^4} - 1}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{3^4} - 1\right)\left(\frac{1}{3^4} + 1\right)}{\cancel{\frac{1}{3^4} - 1}} = \frac{1}{3^4} + 1$$

$$= a^2 + 2a + 1 + 1$$

$$= a^2 + 2a + 2$$

► a ve b pozitif tam sayıdır.

$$a^2 - b^2 = 13$$

olduğuna göre, $a \cdot b$ çarpımı kaçtır?

ÇÖZÜM:

$$a^2 - b^2 = 13 \Rightarrow (a - b) \cdot (a + b) = 13 \text{ tür.}$$

13 asal sayı olduğundan çarpanları 1 ve 13 tür.

Buradan $a - b$ çarpanı 1, $a + b$ çarpanı 13 tür.

$$\begin{array}{r} a - b = 1 \\ + a + b = 13 \\ \hline \end{array}$$

$$2a = 14 \Rightarrow a = 7 \text{ ve } b = 6 \text{ dir.}$$

O hâlde, $a \cdot b = 7 \cdot 6 = 42$ bulunur.

$$a - b = b - c = 3$$

olduğuna göre, $a^2 + c^2 - 2b^2$ ifadesinin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

$$\begin{aligned}a^2 + c^2 - 2b^2 &= a^2 - b^2 + c^2 - b^2 \\&= (a - b) \cdot (a + b) + (c - b) \cdot (c + b) \\&= 3 \cdot (a + b) - 3(c + b) \\&= 3a + \cancel{3b} - 3c - \cancel{3b} \\&= 3a - 3c \\&= 3 \cdot (a - c) \\&= 3 \cdot 6 \\&= 18 \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{r} a - \cancel{b} = 3 \\ + \cancel{b} - c = 3 \\ \hline a - c = 6 \end{array} \right)$$

5) İki Terimin Toplam ve Farkının Küpü

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \quad \text{şeklinde yazılır.}$$

Aşağıda açılımı yapılan ifadeleri inceleyiniz.

$$\Rightarrow (x + 2)^3 = x^3 + 3.x^2.2 + 3.x.2^2 + 2^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

$$\Rightarrow (x - 3)^3 = x^3 - 3.x^2.3 + 3.x.3^2 - 3^3 = x^3 - 9x^2 + 27x - 27$$



$$(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$$

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b) \quad \text{dir.}$$

ÖRNEK

Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayıralım.

a) $(x - 2)^3$

b) $(x + 3)^3$

c) $(2x - 1)^3$

Çözüm:

$$\begin{aligned}\text{a) } (x - 2)^3 &= x^3 + 3x^2(-2) + 3x(-2)^2 + (-2)^3 \\ &= x^3 - 6x^2 + 12x - 8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b) } (x + 3)^3 &= x^3 + 3x^2(3) + 3x(3)^2 + (3)^3 \\ &= x^3 + 9x^2 + 27x + 27\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{c) } (2x - 1)^3 &= (2x)^3 + 3(2x)^2(-1) + 3(2x)^1(-1)^2 + (-1)^3 \\ &= 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 \quad \text{bulunur.}\end{aligned}$$

ÖRNEK

$x = 23$ ve $y = 18$ olduğuna göre, $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm:

$$x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = (x - y)^3 \text{ dür.}$$

O halde $(23 - 18)^3 = 5^3 = 125$ bulunur.

ÖRNEK

$x^3 + y^3 = 15$ ve $x + y = 6$ ise $x \cdot y$ çarpımını bulalım.

Çözüm:

$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$ şeklinde yazabiliyorduk.

$$15 = (6)^3 - 3 \cdot xy(6)$$

$$15 = 216 - 18xy \Rightarrow 18xy = 201$$

$$xy = \frac{201}{18} = \frac{67}{6} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$(x - 5)^3 + 3(x - 5)^2 + 3(x - 5) + 1$ ifadesinin $x = \frac{7}{2}$ iken değerini bulalım.

Çözüm:

$$(x - 5)^3 + 3(x - 5)^2 + 3(x - 5) + 1 = (x - 5 + 1)^3 = (x - 4)^3$$

$$x = \frac{7}{2} \Rightarrow \left(\frac{7}{2} - 4\right)^3 = -\frac{1}{8} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$x - \frac{2}{x} = 5$ ise $x^3 - \frac{8}{x^3}$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm:

$$x - \frac{2}{x} = 5 \Rightarrow \left(x - \frac{2}{x}\right)^3 = (5)^3$$

$$x^3 - 3x^2 \cdot \frac{2}{x} + 3 \cdot x \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^2 - \left(\frac{2}{x}\right)^3 = 125$$

$$x^3 - 6x + \frac{12}{x} - \frac{8}{x^3} = 125$$

$$x^3 - 6\left(x - \frac{2}{x}\right) - \frac{8}{x^3} = 125$$

$$x^3 - \frac{8}{x^3} = 125 + 30 = 155 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$x^3 + 3xy^2 = 105$ ve $y^3 + 3x^2y = 20$ olduğuna göre,
($x + y$) toplamını bulalım.

Çözüm:

$$x^3 + 3xy^2 = 105$$

$$y^3 + 3x^2y = 20$$

+

$$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = 125$$

$$(x + y)^3 = 5^3 \Rightarrow x + y = 5 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$x^3 - y^3 = 41$ ve $xy(x - y) = -28$ olduğuna göre, $x - y$ farkını bulalım.

Çözüm:

$$x^3 - y^3 = 41 \quad \text{ve} \quad -3 / x^2y - xy^2 = -28$$

$$-3x^2y + 3xy^2 = 84$$

$$x^3 - y^3 = 41$$

$$+ \frac{-3x^2y + 3xy^2 = 84}{}$$

$$x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = 125$$

$$(x - y)^3 = 125 \Rightarrow x - y = 5 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$x = 15$ ve $y = 20$ olduğuna göre, $\frac{x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3}{x^3 - 15x^2 + 75x - 125}$ ifadesi-
nin eşitini bulalım.

Çözüm:

$$\frac{x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3}{x^3 - 15x^2 + 75x - 125} = \frac{(x - y)^3}{(x - 5)^3} = \frac{(15 - 20)^3}{(15 - 5)^3}$$

$$= \frac{(-5)^3}{(10)^3}$$

$$= \frac{-125}{1000}$$

$$= -\frac{1}{8} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

x ve y pozitif gerçel sayıları için

$$x + y = 6$$

$$x^2 + y^2 = 20$$

olduğuna göre, $x^3 + y^3$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm:

$$x + y = 6 \quad \text{ve} \quad x^2 + y^2 = 20 \text{ veriliyor.}$$

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$$

$$20 = 36 - 2xy$$

$$2xy = 16$$

$$xy = 8 \text{ bulunur.}$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$$

$$x^3 + y^3 = 6^3 - 3 \cdot 8 \cdot 6$$

$$x^3 + y^3 = 216 - 144$$

$$x^3 + y^3 = 72 \text{ bulunur.}$$

6) İki Küp Toplamı ve İki Küp Farkı

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2) \text{ şeklinde yazılır.}$$

ÖRNEK

Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayıralım.

a) $x^3 - 1$

b) $x^3 + 8$

c) $x^3 - \frac{8}{x^3}$

d) $x^3 - 27y^3$

e) $(27)^x - 8^x$

Çözüm:

$$\text{a) } x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$$

$$\text{b) } x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$$

$$\text{c) } x^3 - \frac{8}{x^3} = \left(x - \frac{2}{x}\right)\left(x^2 + x \cdot \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}\right) = \left(x - \frac{2}{x}\right)\left(x^2 + 2 + \frac{4}{x^2}\right)$$

$$\text{d) } x^3 - 27y^3 = x^3 - (3y)^3 = (x - 3y)(x^2 + 3xy + 9y^2)$$

$$\begin{aligned}\text{e) } (27)^x - 8^x &= (3^x)^3 - (2^x)^3 = (3^x - 2^x)(3^{2x} + 3^x \cdot 2^x + 2^{2x}) \\ &= (3^x - 2^x)(9^x + 6^x + 4^x)\end{aligned}$$

ÖRNEK

$a + b = 6$ ve $a.b = 4$ olduğuna göre, $\frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2}$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm:

$$a + b = 6 \Rightarrow (a + b)^2 = 6^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 36$$

$$a^2 + 8 + b^2 = 36$$

$$a^2 + b^2 = 28$$

$$\frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2} = \frac{(a + b)(a^2 - ab + b^2)}{28} = \frac{6 \cdot (28 - 4)}{28} = \frac{6 \cdot 24}{28} = \frac{36}{7} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$x - y = 3$ ve $x^2 + y^2 = 29$ olduğuna göre, $x^3 - y^3$ değerini bulalım.

Çözüm:

$$x - y = 3 \Rightarrow (x - y)^2 = 3^2$$

$$x^2 - 2xy + y^2 = 9$$

$$29 - 2xy = 9 \Rightarrow 2xy = 20$$

$$xy = 10$$

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

$$x^3 - y^3 = 3 \cdot (29 + 10)$$

$$x^3 - y^3 = 3 \cdot 39$$

$$x^3 - y^3 = 117 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2$ olduğuna göre, $\frac{x^3}{y^3} + \frac{y^3}{x^3}$ değerini bulalım.

Çözüm:

$$\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^2 = (2)^2 \Rightarrow \frac{x^2}{y^2} + 2 \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2} = 4$$

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} = 2$$

$$\frac{x^3}{y^3} + \frac{y^3}{x^3} = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) \left(\frac{x^2}{y^2} - \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}\right)$$

$$\frac{x^3}{y^3} + \frac{y^3}{x^3} = 2 \cdot (2 - 1)$$

$$\frac{x^3}{y^3} + \frac{y^3}{x^3} = 2 \text{ bulunur.}$$

$$\frac{101^3 - 99^3}{101^2 + 101 \cdot 99 + 99^2}$$

işleminin sonucu kaçtır?

ÇÖZÜM

$$\frac{(101 - 99) (101^2 + 101 \cdot 99 + 99^2)}{101^2 + 101 \cdot 99 + 99^2} = 2$$

$$x^2 - 3x + 9 = b$$

$$x + 3 = a$$

olduğuna göre, $x^3 + 9$ un a ve b türünden değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$(x + 3)(x^2 - 3x + 9) = a \cdot b$$

$$x^3 + 27 = a \cdot b$$

$$x^3 + 9 = ab - 18$$

7) Bir Polinoma Terim Ekleyip çıkararak Çarpanlarına Ayırma

Bir polinoma terim ekleyip çıkararak çarpanlarına ayırmada, verilen polinomu iki kare farkına dönüştürebilecek uygun bir terim eklenir veya çıkarılır.

Aşağıdaki polinomları çarpanlarına ayıralım.

a) $x^2 + 8x + 15$ b) $x^4 + x^2 + 1$ c) $x^4 + x^2y^2 + y^4$ d) $a^4 + 4b^4$

a) $x^2 + 8x + 15$ polinomuna 1 sayısını ekleyip çıkaralım.

$$\begin{aligned}x^2 + 8x + 15 + 1 - 1 &= x^2 + 8x + 16 - 1 = (x + 4)^2 - 1 \\&= (x + 4 - 1)(x + 4 + 1) \\&= (x + 3)(x + 5)\end{aligned}$$

b) $x^4 + x^2 + 1$ polinomuna x^2 terimini ekleyip çıkaralım.

$$\begin{aligned}x^4 + x^2 + 1 + x^2 - x^2 &= x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 \\&= (x^2 + 1 - x)(x^2 + 1 + x) \\&= (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)\end{aligned}$$

c) $x^4 + x^2y^2 + y^4$ polinomuna x^2y^2 terimini ekleyip çıkaralım.

$$\begin{aligned}x^4 + x^2y^2 + y^4 + x^2y^2 - x^2y^2 &= x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 - (xy)^2 \\ &= (x^2 + y^2 - xy)(x^2 + y^2 + xy)\end{aligned}$$

d) $a^4 + 4b^4$ polinomuna $4a^2b^2$ terimini ekleyip çıkaralım.

$$\begin{aligned}a^4 + 4b^4 + 4a^2b^2 - 4a^2b^2 &= a^4 + 4a^2b^2 + 4b^4 - 4a^2b^2 \\ &= (a^2 + 2b^2)^2 - (2ab)^2 \\ &= (a^2 + 2b^2 - 2ab)(a^2 + 2b^2 + 2ab)\end{aligned}$$

ÖRNEK

$$x^2 - y^2 - 10x + 4y + 21$$

ifadesini çarpanlarına ayıralım.

Çözüm:

$$x^2 - 10x + 25 - y^2 + 4y - 4$$

$(x - 5)^2 - (y - 2)^2$ iki kare farkı vardır.

$$(x - 5 - y + 2)(x - 5 + y - 2)$$

$$(x - y - 3)(x + y - 7) \text{ elde edilir.}$$

ÖRNEK

$$5x^2 + y^2 - 4xy - 6x + 13$$

ifadesinin alabileceği en küçük değer kaçtır?

Çözüm:

$$\begin{aligned}5x^2 + y^2 - 4xy - 6x + 13 &= 4x^2 + y^2 - 4xy + x^2 - 6x + 9 + 4 \\ &= (2x - y)^2 + (x - 3)^2 + 4\end{aligned}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{ifadesinde } 2x - y = 0 \text{ ve } x - 3 = 0 \text{ olmalı} & \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} & 0^2 + 0^2 + 4 = 4 \\ y = 6 & x = 3 & \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{ bulunur.}\end{array}$$

ÖRNEK

$a^3 - 6a^2 + 12a - 9$ polinomunu çarpanlarına ayıralım.

Çözüm:

$$a^3 - 6a^2 + 12a - 9 = a^3 - 6a^2 + 12a - 8 - 1$$

$$= (a - 2)^3 - 1$$

$$= (a - 2 - 1)((a - 2)^2 + a - 2 + 1)$$

$$= (a - 3)(a^2 - 3a + 3) \text{ şeklinde ayrılır.}$$

ÖRNEK

$x^4 + 2x^2 + 9$ polinomunu çarpanlarına ayıralım.

Çözüm:

$x^4 + 2x^2 + 9$ polinomuna $4x^2$ sayısını ekleyip çıkaralım.

$$\begin{aligned}x^4 + 2x^2 + 9 &= x^4 + 2x^2 + 9 + 4x^2 - 4x^2 \\&= x^4 + 6x^2 + 9 - 4x^2 \\&= (x^2 + 3)^2 - (2x)^2 \\&= (x^2 + 3 - 2x)(x^2 + 3 + 2x) \\&= (x^2 - 2x + 3)(x^2 + 2x + 3) \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

a) $x^4 + x^2 + 1$

b) $a^4 + 4$

ifadelerini çarpanlarına ayırınız.

ÇÖZÜM

- a) Bu ifadeye x^2 ekleyip çıkaralım

$$\begin{aligned}x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 &= (x^2 + 1)^2 - x^2 \\ &= (x^2 + 1 - x)(x^2 + 1 + x)\end{aligned}$$

şeklinde çarpanlarına ayrılır.

- b) $4a^2$ ekleyip çıkaralım

$$\begin{aligned}a^4 + 4a^2 + 4 - 4a^2 &= (a^2 + 2)^2 - (2a)^2 \\ &= (a^2 + 2 - 2a)(a^2 + 2 + 2a)\end{aligned}$$

8) ax^2+bx+c İfadesinin Çarpanlarına Ayrılması

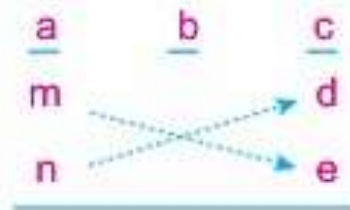
⇒ $a = 1$ olması durumunda aşağıda ifade edildiği gibi çarpanlarına ayırırız.

$$x^2 + bx + c = (x + m)(x + n)$$

$$(m + n = b, m \cdot n = c \text{ oluyorsa})$$

⇒ $a \neq 1$ olması durumunda aşağıda ifade edildiği gibi çarpanlarına ayırırız.

$$ax^2 + bx + c = (mx + d)(nx + e)$$



$$m \cdot n = a$$

$$d \cdot e = c$$

$$m \cdot e + n \cdot d = b \text{ oluyorsa}$$

$$3x^2 - 8x + 4$$

ifadesini çarpanlarına ayırınız.

ÇÖZÜM

$$3x^2 - 8x + 4 = (3x - 2)(x - 2)$$

$$\begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ 3x & -2 \\ x & -2 \end{array}$$

$$6a^2 + 13ab - 5b^2$$

ifadesini çarpanlarına ayırınız.

ÇÖZÜM

$$6a^2 + 13ab - 5b^2 = (3a - b)(2a + 5b)$$

↓

3a

2a

↓

- b

5b

Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

1. $x^2 - 4x - 5$

2. $x^2 + 2x - 15$

3. $x^2 + x - 42$

4. $x^2 - 2ax - 3a^2$

ÇÖZÜM

1. $(x - 5)(x + 1)$
2. $(x + 5)(x - 3)$
3. $(x + 7)(x - 6)$
4. $(x - 3a)(x + a)$

$$x^2 - 4x + xy + 2y - 12$$

ifadesini çarpanlarına ayırınız.

ÇÖZÜM

$$x^2 - 4x - 12 + xy + 2y =$$

$$(x - 6)(x + 2) + y(x + 2) =$$

$$(x + 2)(x - 6 + y)$$

$$2abx^2 + (8a - 3b)x - 12$$

ifadesini çarpanlarına ayırınız.

ÇÖZÜM

$$2abx^2 + (8a - 3b)x - 12$$

—



$$2ax$$

$$bx$$

—



$$-3$$

$$4$$

$$2abx^2 + (8a - 3b)x - 12 = (2ax - 3)(bx + 4)$$

9) Değişken Değiştirerek Çarpanlarına Ayırma

Değişken değiştirme yönteminde, verilen ifadedeki değişkenin ya da belli bir ifadenin yerine yeni bir değişken yazılarak verilen ifade sade hale getirilir. Sade hale gelmiş ifade çarpanlarına ayrılır.

I. $x - 5$

II. $x - 3$

III. $x + 1$

IV. $x + 3$

Yukarıdakilerden hangileri,

$$(x^2 + 4x)^2 - 2x^2 + 8x - 15$$

ifadesinin çarpanlarından birisi değildir?

ÇÖZÜM

$$x^2 - 4x = a \text{ ise}$$

$$a^2 - 2a - 15 = (a - 5) (a + 3)$$

$$= (x^2 - 4x - 5) (x^2 - 4x + 3)$$

$$= (x - 5) (x + 1) \cdot (x - 3) (x - 1)$$

Cevap : Yalnız IV

ÖRNEK

Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayıralım.

a) $x^4 + 8x^2 + 12$

b) $5^{2x} + 5^x - 20$

c) $(x^2 - 3x)^2 - 2(x^2 - 3x) - 8$

Çözüm:

a) $x^4 + 8x^2 + 12$ ifadesinde $x^2 = t$ yazalım.

$$\begin{aligned}(x^2)^2 + 8(x^2) + 12 &= \underline{t^2} + 8t + \underline{12} \\ &\quad \begin{array}{ccc} t & \nearrow & 6 \\ t & \searrow & 2 \end{array} \\ &= (t + 6)(t + 2) \\ &= (x^2 + 6)(x^2 + 2)\end{aligned}$$

b) $5^{2x} + 5^x - 20$ ifadesinde $5^x = t$ yazalım.

$$\begin{aligned}(5^x)^2 + (5^x) - 20 &= \underline{t^2} + t - \underline{20} \\ &\quad \begin{array}{ccc} t & \nearrow & +5 \\ t & \searrow & -4 \end{array} \\ &= (t + 5)(t - 4) \\ &= (5^x + 5)(5^x - 4)\end{aligned}$$

c) $(x^2 - 3x)^2 - 2(x^2 - 3x) - 8$ ifadesinde $x^2 - 3x = t$ yazalım.

$$= \underline{t^2} - 2t - \underline{8}$$

$$\begin{array}{cc} t & -4 \\ t & +2 \end{array}$$

$$= (t - 4)(t + 2)$$

$$= (x^2 - 3x - 4)(x^2 - 3x + 2)$$

$$= (x - 4)(x + 1)(x - 1)(x - 2)$$

ÖRNEK

Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayıralım.

a) $y^4 - 4y^2 - 5$

b) $3(x + 1)^2 - 20(x + 1) - 63$

c) $x^6 + 6x^3 + 5$

d) $a^4 - 5a^2 - 36$

e) $m^4 - 10m^2 + 9$

Çözüm:

a) $y^4 - 4y^2 - 5$

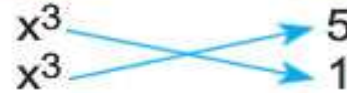

$$= (y^2 - 5)(y^2 + 1)$$

b) $3(x + 1)^2 - 20(x + 1) - 63$ ifadesinde $x+1 = t$ yazalım.

$3t^2 - 20t - 63$


$$= (3t + 7)(t - 9)$$
$$= (3x + 10)(x - 8) \text{ olur.}$$

c) $(x^3)^2 + 6(x^3) + 5$


$$= (x^3 + 5)(x^3 + 1) \text{ bulunur.}$$

d) $\underline{a^4} - 5a^2 - \underline{36}$

$$\begin{array}{cc} a^2 & \rightarrow -9 \\ a^2 & \rightarrow +4 \end{array}$$

$$= (a^2 - 9)(a^2 + 4)$$

$$= (a - 3)(a + 3)(a^2 + 4) \text{ bulunur.}$$

e) $\underline{m^4} - 10m^2 + \underline{9}$

$$\begin{array}{cc} m^2 & \rightarrow -9 \\ m^2 & \rightarrow -1 \end{array}$$

$$= (m^2 - 9)(m^2 - 1)$$

$$= (m - 3)(m + 3)(m - 1)(m + 1) \text{ bulunur.}$$

$$(a + 2)^2 - 6(a + 2) + 9$$

ifadesini tam kare olarak gösteriniz.

ÇÖZÜM

$$a + 2 = t \text{ olsun}$$

$$t^2 - 6t + 9 = (t - 3)^2 \text{ olur.}$$

Şimdi t yerine $a + 2$ yazabiliriz.

$$(t - 3) = (a + 2 - 3)^2 = (a - 1)^2 \text{ olur.}$$

$$x - 3 + \frac{2}{x - 3} = 5$$

olduğuna göre $(x - 3)^2 + \frac{4}{(x - 3)^2}$ ifadesi kaç e eşit olur?

ÇÖZÜM

$x - 3 = a$ olsun.

$$a + \frac{2}{a} = 5 \longrightarrow a^2 + 4 + \frac{4}{a^2} = 25$$

$$a^2 + \frac{4}{a^2} = 21$$

$$(x - 3)^2 + \frac{4}{(x - 3)^2} = 21$$



$$x^4 - 13x^2 + 36$$

ifadesinin çarpanlarını bulunuz.

ÇÖZÜM:

$x^4 - 13x^2 + 36$ ifadesinde $x^2 = t$ dönüşümü yapıldığında

$$(x^2)^2 - 13x^2 + 36 = t^2 - 13t + 36$$

$$t^2 - 13t + 36 = (t - 4) \cdot (t - 9)$$

$$= (x^2 - 4) \cdot (x^2 - 9)$$

$$= (x - 2) \cdot (x + 2) \cdot (x - 3) \cdot (x + 3) \text{ dir.}$$

O hâlde, çarpanları $(x - 2)$, $(x + 2)$, $(x - 3)$ ve $(x + 3)$ bulunur.



$$4^x - 2^x - 6$$

ifadesinin çarpanlarını bulunuz.

ÇÖZÜM:

$4^x - 2^x - 6$ ifadesinde $2^x = a$ dönüşümü yapıldığında

$$4^x - 2^x - 6 = (2^x)^2 - 2^x - 6$$

$$= a^2 - a - 6$$

$$= (a - 3) \cdot (a + 2)$$

$$= (2^x - 3) \cdot (2^x + 2) \text{ dır.}$$

O hâlde, çarpanları $(2^x - 3)$, $(3 - 2^x)$, $(2^x + 2)$ ve $(-2^x - 2)$ bulunur.