

İŞÇİ PROBLEMLERİ

İşçi problemlerinin çözümünde birim zamanda yapılan iş miktarı bulunarak çözüm yapılır.

- Mehmet işin tamamını x saatte yaparsa birim zamanda (1 saatte) işin $\frac{1}{x}$ ini yapar.
- Osman işin tamamını y saatte yaparsa birim zamanda (1 saatte) işin $\frac{1}{y}$ sini yapar.
- Mehmet ile Osman birlikte birim zamanda (1 saatte) işin $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$ sini yapar.

Mehmet ile Osman birlikte işin tamamını t saatte yaparlarsa;

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \cdot t = 1$$

bağıntısı bulunur.

Buradaki 1 işin tamamını temsil ediyor

Örneğin;

Bir işi 3 günde bitirebilen bir işçi;

- 1 günde işin $\frac{1}{3}$ ünü,
- 2 günde işin $\frac{2}{3}$ ünü bitirir.
- x günde $\frac{x}{3}$ ünü bitirir.



bir işi 4 günde bitiren işçi her gün bu işin $\frac{1}{4}$ ü kadarını bitirir. $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$

4 günde işin tamamını yapar.

ÖRNEK:

Mine bir işi 40 günde yapıyorsa, işin $\frac{2}{5}$ ini kaç günde yapar?

ÇÖZÜM

bu soruyu 2 yolla çözelim.

1.yol:

işin tamamını yani 1'i 40 günde yapıyorsa
işin $\frac{2'}{5}$ ini x günde yapar

(Geçen Zaman ile yapılan iş miktarı doğru orantılıdır.)

$$1 \cdot x = \frac{2}{5} \cdot 40$$

$x = 16$ günde yapar.

2.yol:

1 günde işin $\frac{1'}{40}$ ini yapar.

x günde işin $\frac{2'}{5}$ ini yapsın

o zaman $x \cdot \frac{1}{40} = \frac{2}{5}$ olur

burada içler dışlar çarpımı yaparsak

$$5 \cdot x = 80$$

sonuç olarak $x = 16$ olarak bulunur

ÖRNEK:

Özer bir işin $\frac{5}{7}$ sini 25 günde yapıyorsa, işin tamamını kaç günde yapar?

ÇÖZÜM:

İşin tamamını x günde yaptığını düşünelim o zaman

1 günde işin $\frac{1}{x}$ ini yapar

$$25 \cdot \frac{1}{x} = \frac{5}{7}$$

içler dışlar çarpımıyla

x= 35 çıkar.

ÖRNEK:

Mehmet bir işi tek başına 30 günde, Ahmet aynı işi tek başına 60 günde bitirebilmektedir.

Birlikte çalıştıklarında bu işin tamamını kaç günde bitirebileceklerini bulalım.

ÇÖZÜM :

Birlikte çalıştıklarında işi bitirme süresi x olsun.

$$\text{O halde } \frac{1}{30} + \frac{1}{60} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{3}{60} = \frac{1}{x} \Rightarrow x = 20 \text{ gün bulunur.}$$

ÖRNEK:

Ayça bir işi tek başına x günde, Tuba aynı işi tek başına $\frac{x}{3}$ günde bitirebilmektedir.

İkisi birlikte aynı işi 8 günde bitirebildiklerine göre, x değerini bulalım.

Çözüm:

Verilenlere göre, $\frac{1}{x} + \frac{1}{\frac{x}{3}} = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{4}{x} = \frac{1}{8} \Rightarrow x = 32$ dir.

ÖRNEK:

Bir işi Umut 36 günde bitirebilmektedir. Aynı işi Umut ve Ufuk birlikte 12 günde bitirebildiklerine göre Ufuk'un bu işi tek başına kaç günde bitirebileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM >>>

Ufuk işi x günde bitirsin. Aynı işi Umut 36, Ufuk x ve ikisi birlikte 12 günde bitiriyorsa

$$\frac{1}{36} + \frac{1}{x} = \frac{1}{12} \text{ eşitliği yazılır. } \frac{1}{x} = \frac{1}{12} - \frac{1}{36} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{2}{36} \Rightarrow x = 18 \text{ günde bitirir.}$$

ÖRNEK:

Emel bir işi tek başına 24 günde, Yağmur ise aynı işi 36 günde yapabilmektedir. Emel 8 gün, Yağmur 9 gün çalıştığında işin kaçta kaçının tamamlanacağını bulunuz.

ÇÖZÜM >>>

Emel tek başına işi 24 günde bitirdiğine göre 8 günde işin $\frac{1}{24} \cdot 8 = \frac{1}{3}$ ünü yapar.

Yağmur tek başına işi 36 günde bitirdiğine göre 9 günde işin $\frac{1}{36} \cdot 9 = \frac{1}{4}$ ünü yapar.

İkisi birlikte işin $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$ sini tamamlamış olurlar.

ÖRNEK: Ayşe bir işi 5 günde, Fatma ise aynı işi 15 günde yapıyor.
Buna göre, ikisi birlikte bu işin $\frac{4}{5}$ ini kaç günde yaparlar?

ÇÖZÜM :

İkisi birlikte x günde işin $\frac{4'}{5}$ ini bitirsinler

$$\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{15}\right) \cdot x = \frac{4}{5}$$

$$\left(\frac{4}{15}\right) \cdot x = \frac{4}{5}$$

$x = 3$ olarak bulunur.

ÖRNEK: Funda bir işi tek başına 12 saatte, Meriç aynı işi tek başına 24 saatte bitirebilmektedir.

Buna göre, Funda 3 saat, Meriç 2 saat çalışırsa işin kaçta kaçını biter?

ÇÖZÜM :

$$3 \cdot \frac{1}{12} + 2 \cdot \frac{1}{24} = \frac{3}{12} + \frac{2}{24}$$

$$= \frac{3}{12} + \frac{1}{12}$$

$$= \frac{4}{12}$$

$$= \frac{1}{3}$$

işin $\frac{1}{3}$ ünü *bitirirler*

ÖRNEK:

Bir işin tamamını Sıla ile Gülce 18 günde, Mert ile Sıla 9 günde, Gülce ile Mert 12 günde bitirebilmektedir. Üçü birlikte çalıştığında üçünün aynı işi kaç günde bitirebileceklerini bulunuz.

ÇÖZÜM >>>

İşi Sıla x günde, Gülce y günde, Mert z günde bitirsin. Bu durumda

$$\text{Sıla ve Gülce: } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{18}$$

$$\text{Mert ve Sıla: } \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{9}$$

Gülce ve Mert: $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{12}$ denklemleri yazılır. Bu üç denklem taraf tarafa toplanırsa

$$2 \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = \frac{1}{\underset{(2)}{18}} + \frac{1}{\underset{(4)}{9}} + \frac{1}{\underset{(3)}{12}} \Rightarrow 2 \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = \frac{2+4+3}{36} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{8} \text{ olur.}$$

Üçü birlikte 8 günde bitirir.

ÖRNEK:

Bir işi İlknur 12 günde, Cemile ise 20 günde bitirebilmektedir. İkisi birlikte işe başlayıp 3 gün çalıştıktan sonra İlknur işten ayrılıyor.

Geriye kalan işi Cemile'nin tek başına kaç günde bitirebileceğini bulalım.

Çözüm:

1. Yol

Geriye kalan işi Cemile tek başına x günde yapsın.

$$\left(\underbrace{\frac{1}{12} + \frac{1}{20}}_{\substack{(5) \\ (3)}} \right) \cdot 3 + \frac{x}{20} = 1 \text{ (işin tamamı bitirildiği için 1 e eşitlendi.)}$$

birlikte 3 gün
çalışmada yapılan
iş miktarı

$$\Rightarrow \frac{8 \cdot 3}{60} + \frac{x}{20} = 1 \Rightarrow \frac{8 + x}{20} = 1 \Rightarrow x = 12 \text{ dir.}$$

2. Yol

Cemile kalan işi tek başına x günde yapsın. O halde işin tamamı bite-
ne kadar Cemile x + 3 gün, İknur ise 3 gün çalışmış olur. Buna göre,

$$\frac{x + 3}{20} + \frac{3}{12} = 1 \text{ yazılabilir.}$$

$$\Rightarrow \frac{x + 3}{20} = \frac{3}{4} \Rightarrow x = 12 \text{ olur.}$$

ÖRNEK:

1 usta 3 günde 8 sehpa, 1 çırak 4 günde 4 sehpa yapabilmektedir. Buna göre ikisinin birlikte 220 sehpayı kaç günde yapabileceklerini bulunuz.

ÇÖZÜM >>>

Günler eşitlenirse

1 usta 3 günde 8 sehpa → 12 günde 32 sehpa }
1 çırak 4 günde 4 sehpa → 12 günde 12 sehpa } Birlikte 12 günde $32 + 12 = 44$ sehpa yaparlar.

12 günde 44 sehpa
x günde 220 sehpa

D.O

$220 \cdot 12 = x \cdot 44 \Rightarrow x = 60$ günde yapabilirler.

ÖRNEK:

Bir işi Senem 12 günde, Sinem 18 günde ve Öykü 36 günde bitirebiliyor. Üçü beraber işe başladıktan 2 gün sonra Senem, başlangıçtan 3 gün sonra da Sinem işten ayrılıyor. Öykü'nün kalan işi tek başına kaç günde bitirebileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM >>>

Öykü kalan işi t günde bitirsin.

$$\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{18} + \frac{1}{36}\right) \cdot 2 + \left(\frac{1}{18} + \frac{1}{36}\right) \cdot 1 + \frac{1}{36} \cdot t = 1$$

$$\frac{6}{36} \cdot 2 + \frac{3}{36} \cdot 1 + \frac{1}{36} \cdot t = 1$$

$$12 + 3 + t = 36$$

$$t = 36 - 15 \Rightarrow t = 21 \text{ günde bitirir.}$$

ÖRNEK:

Aynı kapasitede 7 işçi beraberce bir işi yapmaya başlıyorlar. Her günün sonunda işçilerden biri işi bırakıyor.

Bu şekilde iş 3 günde bittiğine göre, işçilerden ikisinin işin tamamını kaç günde bitirebileceğini bulalım.

Çözüm:

Eşit kapasiteli işçilerden birisi tek başına bu işin tamamını x günde bitirsin.

1. gün 7 işçi, 2. gün 6 işçi ve 3. gün 5 işçi birlikte çalıştığından

$$\frac{7}{x} + \frac{6}{x} + \frac{5}{x} = 1 \Rightarrow x = 18 \text{ dir. İşin tamamını,}$$

1 işçi → 18 günde bitirebiliyorsa

2 işçi → y günde bitirir

$$\text{T.O: } 1 \cdot 18 = 2 \cdot y \Rightarrow y = 9 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK:

Aynı kapasitedeki 10 işçi bir işi birlikte çalışarak 10 günde bitirebiliyor.
Tüm işçiler işe başladıktan 4 gün sonra 2 işçi işten ayrılırsa kalan işçilerin kalan işin $\frac{2}{3}$ ünü kaç günde bitirebileceğini bulalım.

Çözüm:

10 işçi işe başlayıp 4 gün çalıştıklarında geriye bu 10 kişinin 6 günde bitirebileceği iş kalır.

10 işçinin 6 günde bitirilebileceği işin $\frac{2}{3}$ ü

$6 \cdot \frac{2}{3} = 4$ günlük iştir. O halde 2 işçi işten ayrıldığında

10 işçinin \rightarrow 4 günde bitirebileceği işi

8 işçi \rightarrow x günde bitirir

T.O: $10 \cdot 4 = 8 \cdot x \Rightarrow x = 5$ olur.

ÖRNEK:

Bir elbiseyi eş güçte 3 usta 8 günde, eş güçte 6 çırak 15 günde dikiyor.

Buna göre, bu usta ve çıraklarla eş güçte 4 usta ve 3 çırağın birlikte çalışarak aynı elbiseyi kaç günde dikebileceğini bulalım.

Çözüm:

3 usta → 8 günde dikebiliyorsa

4 usta → x günde diker

$$\text{T.O: } 3 \cdot 8 = 4 \cdot x \Rightarrow x = 6$$

6 çırak → 15 günde dikebiliyorsa

3 çırak → y günde diker

$$\text{T.O: } 6 \cdot 15 = 3 \cdot y \Rightarrow y = 30$$

4 usta ve 3 çırağın birlikte çalışarak elbiseyi dikebileceği zamana x denirse

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{30} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{6}{30} = \frac{1}{x} \Rightarrow x = 5 \text{ gün bulunur.}$$

(5) (1)

ÖRNEK:

Filiz bir işin $\frac{3}{4}$ ünü 6 günde, Sedef ise aynı işin $\frac{2}{3}$ sini 8 günde tamamlamaktadır. Filiz çalışma hızını 2 katına çıkarıp Sedef çalışma hızını yarıya indirirse ikisi birlikte 3 günde aynı işin ne kadarını yapabileceklerini bulunuz.

ÇÖZÜM >>

Filiz, işin $\frac{3}{4}$ ünü 6 günde yaparsa tamamını 8 günde yapar. Hızını 2 katına çıkarırsa süre yarıya iner ve 4 gün olur.

Sedef, işin $\frac{2}{3}$ sini 8 günde yaparsa tamamını 12 günde yapar. Hızını yarıya indirirse süre 2 katına çıkar ve 24 gün olur.

Filiz 1 günde işin $\frac{1}{4}$ ini

Sedef 1 günde işin $\frac{1}{24}$ ini yapar. İkisi birlikte 3 günde işin

$$\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{24} \right) \cdot 3 = x \Rightarrow \frac{7}{24} \cdot 3 = x \Rightarrow x = \frac{7}{8} \text{ sini yaparlar.}$$

Havuz Problemleri

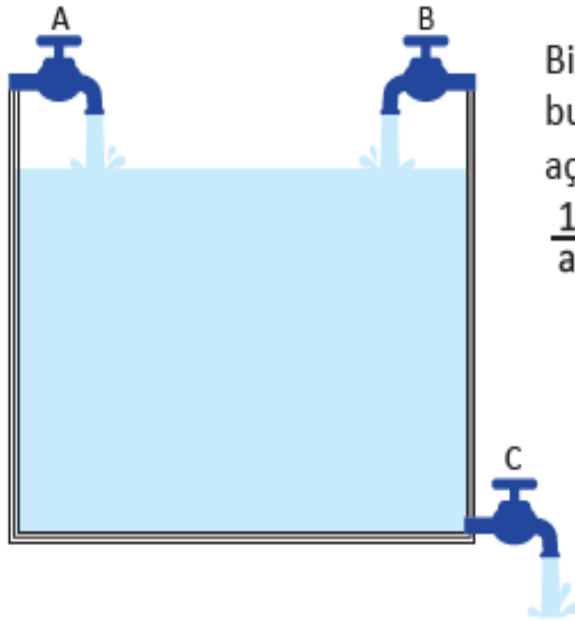
Havuz problemlerinin çözümleri de işçi problemlerine benzerdir.

Bir havuzu bir musluk x saatte doldurursa

- 1 saatte $\frac{1}{x}$ ini,
- a saatte $\frac{a}{x}$ sini doldurur.

1. musluğun a saatte, 2. musluğun b saatte doldurduğu bir havuzu ikisi birlikte x saatte dolduruyorsa bu durum,

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \cdot x = 1 \text{ veya } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{x} \text{ tir.}$$



Bir havuzu üsteki iki musluk, sırasıyla a ve b saatte doldururken dipte bulunan 3. musluk dolu havuzu c saatte boşaltsın. Üçü birden aynı anda açıldığında boş havuzu x saatte dolduruyorsa bu durum

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = \frac{1}{x} \text{ bağıntısıyla ifade edilir.}$$

ÖRNEK:

A ve B muslukları, boş bir havuzu sırasıyla 12 ve 18 saatte doldururken havuzun altında bulunan C musluğu, dolu havuzu 36 saatte boşaltmaktadır. Üç musluk aynı anda açıldığında boş havuzun kaç saatte dolacağını bulunuz.

ÇÖZÜM >>>

Üç musluk, aynı anda açıldığında boş havuzu x saatte doldursun.

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{18} - \frac{1}{36} = \frac{1}{x}$$

(6) (4) (2)

$$\frac{6 + 4 - 2}{72} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{8}{72} = \frac{1}{x} \Rightarrow x = 9 \text{ saatte dolar.}$$

ÖRNEK:

800 litrelik bir havuzu A musluğu 12 saatte, B musluğu 16 saatte dolduruyor. Havuzun dibindeki C musluğu, dolu havuzu 24 saatte boşaltıyor. Havuz boşken 3 musluk birlikte açıldığında havuz dolana kadar C musluğunun kaç litre su boşaltacağını bulunuz.

ÇÖZÜM >>>

Üç musluk havuzu t saatte doldursun.

$$\frac{1}{\underset{(4)}{12}} + \frac{1}{\underset{(3)}{16}} - \frac{1}{\underset{(2)}{24}} = \frac{1}{t}$$

$$\frac{4 + 3 - 2}{48} = \frac{1}{t}$$

$$\frac{5}{48} = \frac{1}{t} \Rightarrow t = \frac{48}{5} \text{ saatte dolar.}$$

C musluğu,

24 saatte

$$\frac{48}{5}$$

800 litre

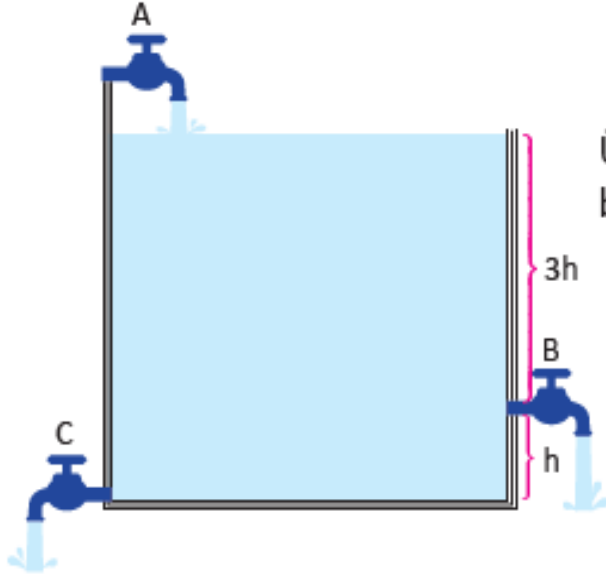
x litre boşalır.

D.O

$$24 \cdot x = 800 \cdot \frac{48}{5} \Rightarrow x = 320 \text{ litre su boşaltmış olur.}$$

ÖRNEK:

Şekildeki gibi bir depoya üç musluk yerleştiriliyor. A musluğu, depoyu tek başına 6 saatte dolduruyor. C musluğu, tek başına 12 saatte boşaltıyor. B musluğu da kendi seviyesine kadar olan kısmı tek başına 12 saatte boşaltıyor.



Üç musluk aynı anda açıldığında boş deponun kaç saatte dolacağını bulunuz.


ÇÖZÜM >>>

A ve C muslukları açıkken geçen süre t_1 olsun.

$$\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{12}\right) \cdot t_1 = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{12} \cdot t_1 = \frac{1}{4} \Rightarrow t_1 = 3 \text{ saat olur.}$$

B musluğu için

12 saatte		$\frac{3}{4}$
x saatte		1 (tamamı) boşalır.

D.O

$$12 \cdot 1 = x \cdot \frac{3}{4} \Rightarrow x = 16 \text{ olur.}$$

Muslukların üçü birden açıkken geçen süre t_2 olsun.

$$\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{12} - \frac{1}{16}\right) \cdot t_2 = \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{48} \cdot t_2 = \frac{3}{4} \Rightarrow t_2 = 36 \text{ saat olur.}$$

$$t_1 + t_2 = 3 + 36 = 39 \text{ saatte dolar.}$$

ÖRNEK:

Bir musluk boş bir havuzu 18 saatte doldurabilmektedir.

Bu musluktan birim zamanda akan su miktarı $\frac{1}{5}$ oranında artırılırsa, musluğun aynı havuzu kaç saatte doldurabileceğini bulalım.

Çözüm:

İlk durumda, birim zamanda musluktan akan su miktarı (musluğun kapasitesi) 1 ise birim zamanda akan su miktarı $\frac{1}{5}$ oranında artırılırsa $\left(1 + \frac{1}{5}\right) = \frac{6}{5}$ olur.

Kapasite ile işin bitme süresi ters orantılı olduğundan

1 kapasite ile \rightarrow 18 saatte doldurursa

$\frac{6}{5}$ kapasite ile \rightarrow x saatte doldurur

$$\text{T.O: } 1 \cdot 18 = \frac{6}{5} \cdot x \Rightarrow x = 15 \text{ tir.}$$