Birinci Dereceden iki Bilinmeyenli Denklemler

a, b ve c sabit gerçek sayılar, a ve b sıfırdan farklı olmak üzere, x ve y değişkenleri için $ax + by = c$ şeklinde yazılan ifadelere birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem denir.

$2x - 3y = 5$ ifadesi, x ve y değişkenlerine bağlı birinci dereceden iki bilinmeyenli bir denklemdir.

$2a - b = -4$ ifadesi, a ve b değişkenlerine bağlı birinci dereceden iki bilinmeyenli bir denklemdir.

Değişkenleri birinci dereceden ve aynı olan birden fazla denklem grubuna ise **birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemi** denir.

Bir denklem sisteminin **çözüm kümesi**, bu iki denklemi aynı anda sağlayan (x, y) sıralı ikilileridir.

$$2x - 3y = 1$$

$$x + y = 2$$

denklem grubu birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemidir.

(2, 1) ile (3, –1) sıralı ikilileri,

$$2x - 3y = 1$$

$$x + y = 3$$

denklem sisteminin çözümü müdür?

Çözüm

(2, 1) sıralı ikilisindeki $x = 2$ ve $y = 1$ değerlerini her iki denklemde de yerine koyarak kontrol edelim.

$2x - 3y = 1$ ise $2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 1$ dir.

$x + y = 3$ ise $2 + 1 = 3$ tür.

(2, 1) sıralı ikilisi her iki denklemi sağlar. Buna göre, (2, 1) denklem sisteminin çözümüdür.

(3, –1) sıralı ikilisindeki $x = 3$ ve $y = -1$ değerlerini her iki denklemde de yerine koyarak kontrol edelim.

$2x - 3y = 1$ ise $2 \cdot 3 - 3 \cdot (-1) \neq 1$ dir.

$x + y = 3$ ise $3 + (-1) \neq 3$ tür.

(3, –1) sıralı ikilisi birinci denklemi sağlamaz, ikinci denklemi sağlamaz.Bu ikilinin çözüm kümesi elemanı olması için her iki denklemi sağlaması gerekir.

Bu nedenle, (3, –1) denklem sisteminin çözümü değildir.

Denklem Sistemlerinin Çözüm Kümesini Bulma

Bir denklem sisteminin çözüm kümesini sıralı ikilileri tek tek yerine koyarak belirlemek her zaman mümkün olmayabilir.

Denklem sistemlerinin çözümlerini bulmak için yerine koyma, yok etme, grafik çizme gibi matematiksel yöntemler kullanılır.

Yerine Koyma Yöntemi

$a.x + b.y = c$
$d.x + e.y = f$

denklem sisteminin yerine koyma yöntemi ile çözümünde;
birinci ya da ikinci denklemde x ya da y değişkeni yalnız bırakılarak,
elde edilen ifade diğer denklemde yerine yazılır.

Yerine Koyma Yöntemiyle denklem sistemini çözerken genellikle katsayısı 1 olan değişken diğer değişken türünden ifade edilir.

$$x - 2y = 5$$

$$2x + y = 5$$

denklem sistemini yerine koyma yöntemi ile çözelim.

Çözüm

$$x - 2y = 5 \quad ... \quad (*)$$

$$2x + y = 5 \quad ... \quad (**)$$

Denklemlerden bir tanesini bilinmeyenlerden birini yalnız bırakacak şekilde düzenleyelim.

(*) denklemini düzenleyelim. $x - 2y = 5$ ise $x = 5 + 2y$ dir.

x yerine $5 + 2y$ ifadesini (**) denkleminde yerine yazalım.

$2x + y = 5$ ise $2(5 + 2y) + y = 5$

$$10 + 4y + y = 5$$

$$5y = -5$$

$$y = -1$$

Bu sonucu $x = 5 + 2y$ ifadesinde yerine yazalım.

$x = 5 + 2 \cdot (-1) = 3$ tür.

Buna göre, $(3, -1)$ sıralı ikilisi bu denklem sisteminin çözümüdür.

$$3x - 4y = -11$$

$$2x - y = -4$$

denklem sistemini yerine koyma yöntemi ile çözelim.

Çözüm

$$3x - 4y = -11 \quad ... \quad (*)$$

$$2x - y = -4 \quad ... \quad (**)$$

(**) denklemini düzenleyelim. $2x - y = -4$ ise $y = 2x + 4$ tür.

y yerine $2x + 4$ ifadesini (*) denkleminde yerine yazalım.

$3x - 4y = -11$ ise $3x - 4(2x + 4) = -11$

$$3x - 8x - 16 = -11$$

$$-5x = 5$$

$$x = -1$$

$y = 2(-1) + 4 = 2$ dir.

Buna göre, $(-1, 2)$ sıralı ikilisi bu denklem sisteminin çözümüdür.

Yok Etme Yöntemi

$ax + by = c$
$dx + ey = f$

denklem sisteminin yok etme yönteminde her iki denklem taraf tarafa toplanarak bilinmeyenlerden birisi yok edilir.

Verilen denklem sisteminde taraf tarafa toplama işlemi ile bilinmeyenlerden birisi yok olmuyorsa, çarpma işlemi ile bilinmeyenlerden birisinin katsayıları eşit ve zıt işaretli olacak şekilde düzenlenir.

$$3x - 2y = 6$$

$$x + 2y = 2$$

denklem sistemini yok etme yöntemi ile çözelim.

Çözüm

Bu denklem sisteminde bulunan denklemleri taraf tarafa toplayalım.

$$\begin{array}{r} 3x-2y=6 \\ +\quad x+2y=2 \\ \hline \end{array}$$

$4x=8$ ise $x=2$ dir.

Elde edilen x değerini 2. denklemde yerine yazarak y yi bulalım.

$x = 2$ ise $2 + 2y = 2$

$$2y = 0$$

$$y = 0$$

Buna göre, (2, 0) sıralı ikilisi bu denklem sisteminin çözümüdür.

$$4x - y = 10$$

$$x + 2y = 7$$

denklem sistemini yok etme yöntemi ile çözelim.

Çözüm

$$4x - y = 10 \quad \ldots \quad (*)$$

$$x + 2y = 7 \quad \ldots \quad (**)$$

y değişkenini yok edelim. Bunun için (*) denklemini 2 ile çarpalım.

$$\begin{array}{r} 8x - 2y = 20 \\ +\quad x + 2y = 7 \\ \hline \end{array}$$

$$9x = 27 \text{ ise } x = 3 \text{ tür.}$$

Elde edilen x değerini (**) denkleminde yerine yazarak y yi bulalım.

$x = 3$ ise $3 + 2y = 7$

$$2y = 4$$

$$y = 2$$

Buna göre, (3, 2) sıralı ikilisi bu denklem sisteminin çözümüdür.

Grafik Çizme Yöntemi

$y = mx + n$ şeklindeki bir ifadenin koordinat düzleminde eğimi m, y eksenini kestiği nokta n dir.

$y = mx + n$ ve $ax + by = c$ denklemlerin grafikleri koordinat düzleminde bir doğru belirtir.

Denklem sistemlerinin grafiksel yorumunu yaparken denklem sisteminde bulunan her iki denklem $y = mx + n$ şeklinde yazılır.

Grafik çiziminde kolaylık olması için x yerine 0 yazıp y değeri ve y yerine 0 yazıp x değeri bulunur.

$$2x + y = 4$$

$$x - y = 2$$

denklem sistemini grafiklerini çizerek çözelim.

Çözüm

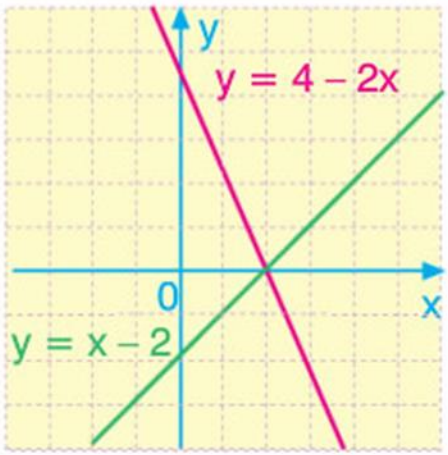
Her iki denklemi $y = mx + n$ şeklinde yazalım.

$2x + y = 4$ ise $y = 4 - 2x$ tir.

Bu denklemde, $x = 0$ için $y = 4$ ve $y = 0$ için $x = 2$ dir.

$x - y = 2$ ise $y = x - 2$ dir.

Bu denklemde, $x = 0$ için $y = -2$ ve $y = 0$ için $x = 2$ dir.



Yukarıdaki grafikte görüldüğü üzere, iki denklemi aynı anda sağlayan çözüm tektir ve doğruların kesiştiği nokta (2, 0) noktasıdır.

Verilen denklem sistemini yok etme yöntemiyle de çözerek grafiksel çözüm ile karşılaştıralım.

$$\begin{array}{rl} & 2x + y = 4 \\ + & x - y = 2 \\ \hline & 3x = 6 \text{ ise } x = 2 \text{ dir.} \end{array}$$

2. denklemden $x = 2$ için $2 - y = 2$

$y = 0$ bulunur.

O halde, çözüm kümesi $(2, 0)$ elde edilir.

$$2x - y = 4$$

$$2x - y = -1$$

denklem sisteminin çözümünü inceleyelim.

Çözüm

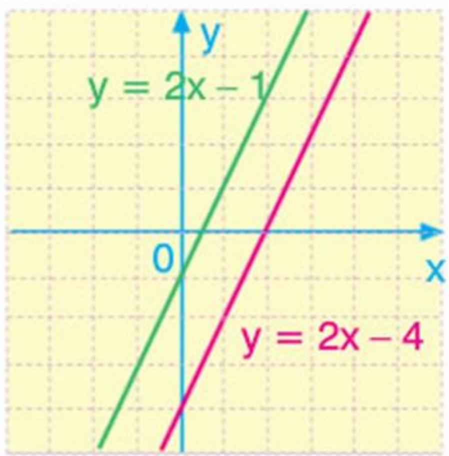
Her iki denklemi $y = mx + n$ şeklinde yazalım.

$2x - y = 4$ ise $y = 2x - 4$ tür.

Bu denklemde, $x = 0$ için $y = -4$ ve $y = 0$ için $x = 2$ dir.

$2x - y = -1$ ise $y = 2x - 1$ dir.

Bu denklemde, $x = 0$ için $y = -1$ ve $y = 0$ için $x = \frac{1}{2}$ dir. Bu denklemleri belirten doğruları koordinat düzleminde gösterelim



Yukarıdaki grafikte görüldüğü üzere, doğrular paraleldir ve kesişim noktaları yoktur.

Verilen denklem sistemini yerine koyma yöntemiyle de çözerek grafiksel çözüm ile karşılaştıralım.

$2x - y = 4$ ise $y = 2x - 4$ tür.

$2x - y = -1$ ise $2x - (2x - 4) = -1$

$$2x - 2x + 4 = -1$$

$$4 = -1$$

Bu eşitlik doğru değildir. Bu sonuç her iki denklemi sağlayan bir (x, y) sıralı ikilisinin bulunamayacağı anlamına gelir.

Sonuç olarak denklem sisteminin çözüm kümesi boş kümedir.

$$2x + y = 4$$

$$4x + 2y = 8$$

denklem sisteminin çözümünü inceleyelim.

Çözüm

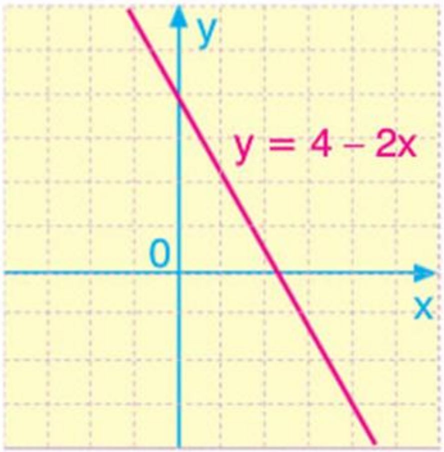
Her iki denklemi $y = mx + n$ şeklinde yazalım.

$2x + y = 4$ ise $y = 4 - 2x$ tir.

Bu denklemde, $x = 0$ için $y = 4$ ve $y = 0$ için $x = 2$ dir.

$4x + 2y = 8$ ise $2y = 8 - 4x$ eşitliğinden $y = 4 - 2x$ tir.

Her iki denklem $y = 4 - 2x$ olmaktadır. Bu da her ikisinin de grafiğinin aynı olacağı anlamına gelir.



Yukarıdaki grafikte görüldüğü üzere, doğrular çakışıktır ve kesişim noktaları sonsuzdur.

Verilen denklem sistemini yerine koyma yöntemiyle de çözerek grafiksel çözüm ile karşılaştıralım.

$2x + y = 4$ ise $y = 4 - 2x$ tir.

$4x + 2y = 8$ ise $4x + 2(4 - 2x) = 8$

$$4x + 8 - 4x = 8$$

$$8 = 8$$

Bu eşitlik her zaman doğrudur. Burada her iki denklemin aynı olduğu ve dolayısıyla denklemlerden birisini sağlayan bütün sıralı ikililerin diğer denklemi de sağladığı anlamına gelir.

O halde, çakışık iki doğrudan oluşan bir denklem sisteminde bütün x gerçek sayıları için bir y değeri bulunur.

Bu nedenle çözüm kümesi sonsuz elemanlıdır.

Bir denklem sisteminde;

- **Doğrular kesişiyor** ise çözüm kümesi (x, y) sıralı ikilisi şeklinde **tek bir noktadan** oluşur.

- **Doğrular paralel** ise çözüm kümesi **boş küme**dir.

- **Doğrular çakışık** ise sistemdeki her iki denklem de aynıdır. Denklemlerden birini sağlayan bütün sıralı ikililer çözüm kümesidir ve çözüm kümesi **sonsuz elemanlı**dır.

$ax + by + c = 0$

$dx + ey + f = 0$

denklem sisteminde;

- $\frac{a}{d} \neq \frac{b}{e}$ ise doğrular birbirini bir noktada keser. Çözüm kümesi tek elemanlıdır.

- $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} \neq \frac{c}{f}$ ise doğrular paraleldir ve çözüm kümesi boş kümedir.

- $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$ ise doğrular çakışıktır. Çözüm kümesi ise sonsuz elemanlıdır.

$$ax - 2y = 3$$

$$3x + by = 4$$

denklem sisteminin çözüm kümesi tek elemanlı olduğuna göre, a ve b arasındaki bağıntıyı bulalım.

Çözüm

$\frac{a}{3} \neq \frac{-2}{b}$ ise çözüm kümesi tek elemanlı olur.

Buna göre, $\frac{a}{3} \neq \frac{-2}{b}$ ise $a \cdot b \neq -6$ olmalıdır.

$$(m + 1)x + 2y - 3 = 0$$

$$(m - 2)x + 3y + 5 = 0$$

denklem sisteminin çözüm kümesinin boş küme olması için m nin alabileceği değeri bulalım.

Çözüm

$\dfrac{m+1}{m-2} = \dfrac{2}{3} \neq \dfrac{-3}{5}$ ise çözüm kümesi boş küme olur.

Buna göre,

$\dfrac{m+1}{m-2} = \dfrac{2}{3}$ ise $3(m+1) = 2(m-2)$

$$3m + 3 = 2m - 4$$

$$m = -7 \text{ olur.}$$

$$(2a-1)x+4y-6=0$$

$$x+2y+b+2=0$$

denklem sisteminin bütün x gerçek sayıları için çözümü olduğuna göre, a ve b değerlerini bulalım.

Çözüm

$\dfrac{2a-1}{1}=\dfrac{4}{2}=\dfrac{-6}{b+2}$ ise çözüm kümesi sonsuz elemanlıdır.

$\dfrac{2a-1}{1}=\dfrac{4}{2}$ ise $4a-2=4$

$$4a=6$$

$$a=\frac{3}{2}$$

$\dfrac{4}{2}=\dfrac{-6}{b+2}$ ise $4b+8=-12$

$$4b=-20$$

$$b=-5$$

$$\frac{3x}{2} + \frac{3y}{5} = 1$$

$$\frac{5x}{4} + \frac{2y}{3} = 1$$

olduğuna göre, y kaçtır?

I. ve II. denklemlerin paydalarını eşitleyelim.

$$-1\ /\ 15x + 6y = 10$$

$$\underline{\qquad 15x + 8y = 12}$$

$$-15x - 6y = -10$$

$$\underline{+\quad 15x + 8y = 12}$$

$$2y = 2$$

$y = 1$ dir.

$$x + 2my + 3 = 0$$
$$mx + ny + m + 1 = 0$$

sisteminin çözüm kümesinin sonsuz elemana sahip olması için, (m, n) ikilisi ne olmalıdır?

$$\frac{1}{m} = \frac{2m}{n} = \frac{3}{m+1} \text{ dir.} \quad \frac{1}{m} = \frac{3}{m+1} \Rightarrow 3m = m + 1$$

$$\Rightarrow m = \frac{1}{2} \text{ dir.}$$

$$\frac{1}{m} = \frac{2m}{n} \Rightarrow 2 = \frac{1}{n} \Rightarrow n = \frac{1}{2} \text{ dir.}$$

Demek ki $(m, n) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ dir.

BİRİNCİ DERECEDEN İKİ BİLİNMEYENLİ EŞİTSİZLİK VE EŞİTSİZLİK SİSTEMLERİ

a, b ve c sabit gerçek sayılar ve a ve b sıfırdan farklı olmak üzere, $ax + by \leq c$ şeklinde yazılan ifadelere **birinci dereceden iki bilinmeyenli eşitsizlik** denir.

$\leq$ sembolü yerine $>$, $<$, veya $\geq$ sembolleri de yazılabilir.)

Bir eşitsizliği sağlayan (x, y) sıralı ikilisine o **eşitsizliğin bir çözümü** denir. Eşitsizliği sağlayan bütün sıralı ikililere ise **eşitsizliğin çözüm kümesi** denir ve grafik üzerinde taralı bölge olarak gösterilir

$2x - y < 5$ ifadesi, birinci dereceden iki bilinmeyenli bir eşitsizliktir.

$$2x - 3y < 1$$

$$x + y \geq 2$$

ifadeleri ise birinci dereceden iki bilinmeyenli eşitsizlik sistemidir.

(2, 1) sıralı ikilisi

$$2x - 3y < 3$$

$$x + y > 1$$

eşitsizlik sistemi için bir çözüm müdür?

Çözüm

(2, 1) sıralı ikilisini eşitsizlik sisteminde yerine koyalım:

$2x - 3y < 3$ ise $2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 < 3$ (Doğru)

$x + y > 1$ ise $2 + 1 > 1$ (Doğru)

(2, 1) sıralı ikilisi her iki eşitsizliği de sağladığı için bu eşitsizlik sisteminin bir çözümüdür. Fakat bu sıralı ikili eşitsizlik sisteminin çözüm kümesinin elemanlarından sadece bir tanesidir.

Eşitsizliklerin Grafik Çizimi

1) Eşitsizlik sembolünü “=” sembolüne çevirerek bir denklem elde edilir.
Bu denklemin grafiği çizilir.
<, > sembolleri için kesikli çizgi, ≥, ≤ sembolleri için grafik düz çizgi olarak çizilir.

2) Denklem grafiğinin iki bölgeye ayırdığı koordinat düzleminin herhangi bir tarafından bir nokta alınıp eşitsizlikte yerine koyarak sağlayıp sağlamadığını kontrol edilir.

3) Genel olarak doğrunun grafiği orijinden geçmiyorsa, (0, 0) noktası test noktası olarak alınabilir.

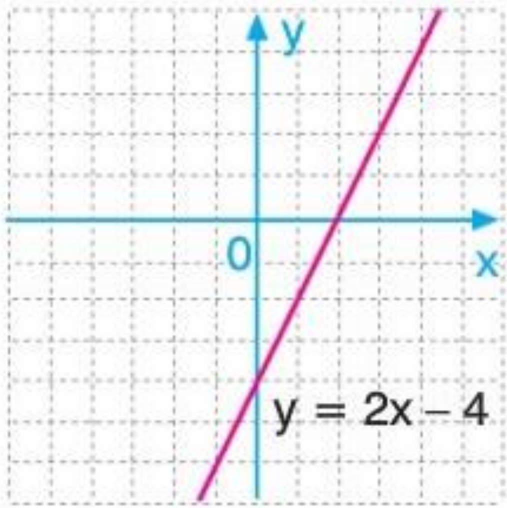
4) Test edilen nokta eşitsizliği sağlıyorsa noktanın bulunduğu bölge, sağlamıyorsa diğer bölge taranır.

$$y > 2x - 4$$

eşitsizliğinin çözüm kümesini koordinat düzleminde inceleyelim.

Çözüm

Öncelikle $y = 2x - 4$ doğrusu çizilir.

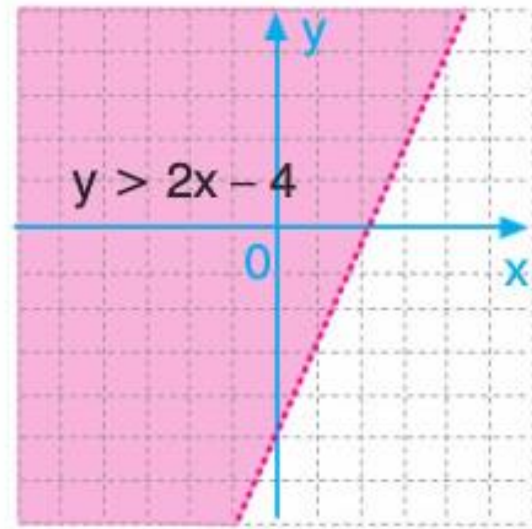


Çizilen grafik ile iki bölgeye ayrılan koordinat düzleminde hangi bölgenin çözüm kümesi olduğuna karar verilir. Bunun için herhangi bir nokta alıp eşitsizlikte yerine yazılır.

(0, 0) noktası $y > 2x - 4$ eşitsizliğinde yerine yazıldığında

$0 > 2 \cdot 0 - 4$ ise $0 > -4$ tür.

Bu sonuç doğru olduğundan (0, 0) sıralı ikilisi $y > 2x - 4$ eşitsizliğinin çözüm kümesindedir. Bu nedenle (0, 0) noktasının bulunduğu bölge $y = 2x - 4$ doğrusunun ayırdığı bölgenin çözüm kümesini oluşturur ve bu bölge koordinat düzleminde taranarak gösterilir.



$y = 2x - 4$ denklemini sağlayan noktalar (doğrunun kendisi) eşitsizliği sağlamadığı için kesik çizgi ile gösterilir.

$$2x + 3y \geq 6$$

eşitsizliğinin çözüm kümesini koordinat düzleminde inceleyelim.

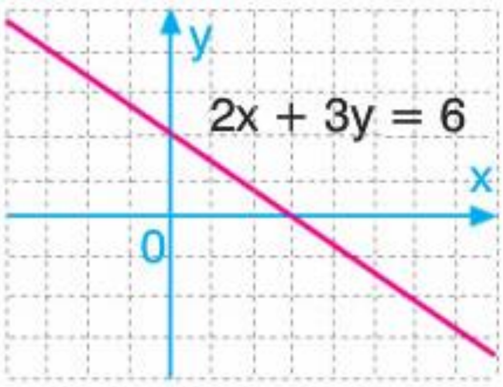
Çözüm

Öncelikle $2x + 3y = 6$ doğrusu çizilir.

$x = 0$ için $y = 2$ ve

$y = 0$ için $x = 3$ tür.

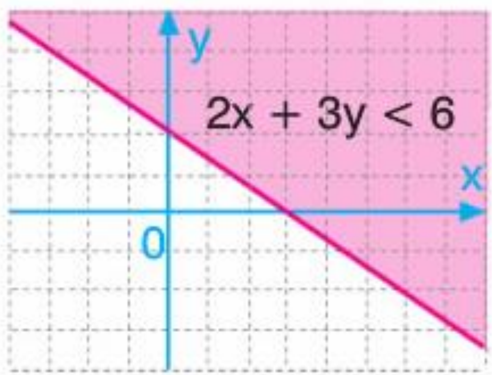
Eksenleri kesim noktası $(0, 2)$ ve $(3, 0)$ dır.



(0, 0) noktası $2x + 3y \geq 6$ eşitsizliğinde yerine yazıldığında

$2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \geq 6$ ise $0 \geq 6$ dır.

Bu sonuç yanlış olduğundan (0, 0) sıralı ikilisi $2x + 3y \geq 6$ eşitsizliğinin çözüm kümesinde değildir. Bu nedenle (0, 0) noktasının bulunduğu bölge yerine doğrunun ayırdığı diğer bölge çözüm kümesini oluşturur ve bu bölge koordinat düzleminde taranarak gösterilir.



$2x + 3y = 6$ denklemini sağlayan noktalar eşitsizliği sağladığı için düz çizgi ile gösterilir.

$$y < 2x$$

eşitsizliğinin çözüm kümesini koordinat düzleminde inceleyelim.

Çözüm

$y = 2x$ doğrusu orijinden geçer.

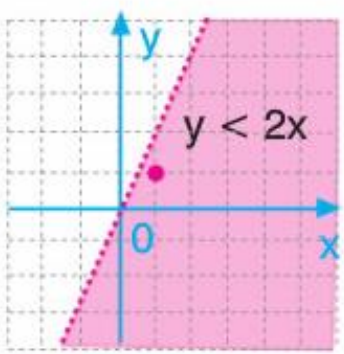
$x = 2$ için $y = 4$; $x = 1$ için $y = 2$ dir.

$y = 2x$ doğrusu $(2, 4)$ ve $(1, 2)$ noktalarından geçer.

Orijin dışında farklı bir nokta örneğin $(1, 1)$ noktasını alalım.

$(1, 1)$ noktası için $1 < 2 \cdot 1$ ise $1 < 2$ dir.

Bu sonuç doğru olduğundan $(1, 1)$ sıralı ikilisi $y < 2x$ eşitsizliğinin çözüm kümesindedir. $(1, 1)$ noktasının bulunduğu bölge taranır.



$y = 2x$ denklemini sağlayan noktalar (doğrunun kendisi) eşitsizliği sağlamadığı için kesik çizgi ile gösterilir.

Eşitsizlik Sistemleri

Denklem sistemlerinde olduğu gibi, değişkenleri aynı olan birden fazla eşitsizliğe **eşitsizlik sistemi** denir.

Eşitsizlik sisteminin çözüm kümesinde bulunan (x, y) sıralı ikililerinin, ortak bir çözüm olması için sistemde bulunan her eşitsizliği sağlamalıdır.

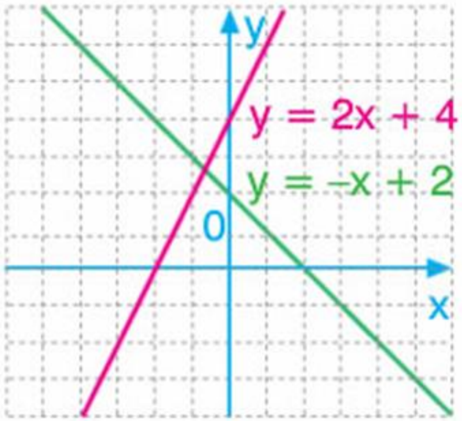
$$y \leq -x + 2$$

$$y > 2x + 4$$

eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini koordinat düzleminde gösterelim.

Çözüm

$y = -x + 2$ ve $y = 2x + 4$ denklemlerinin grafiklerini çizelim.



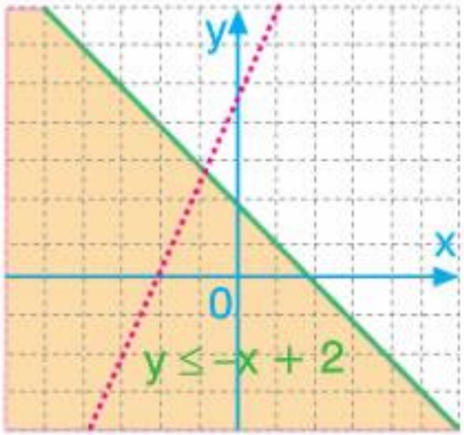
(0, 0) sıralı ikilisini eşitsizlik sisteminde yerine koyalım:

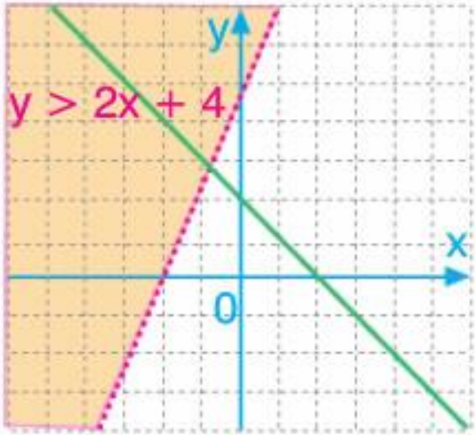
$y \leq -x + 2$ ise $0 \leq -0 + 2$ (Doğru)

$y \leq -x + 2$ eşitsizliğinin çözüm kümesi için (0,0) sıralı ikilisinin bulunduğu bölge taranır.

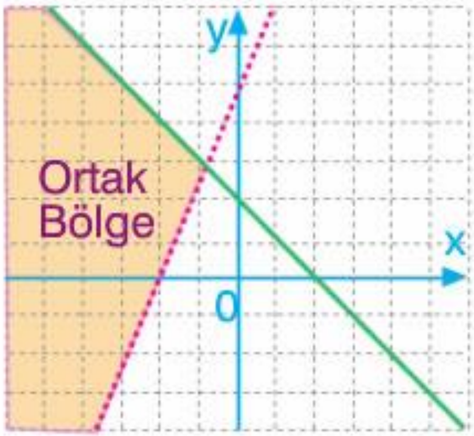
$y > 2x + 4$ ise $0 > 2 \cdot 0 + 4$ (Yanlış)

$y > 2x + 4$ eşitsizliğinin çözüm kümesi için (0,0) sıralı ikilisinin bulunmadığı bölge taranır.





Her iki grafikte taranan ortak bölgeyi belirleyelim.



Yukarıdaki grafikte görüldüğü gibi koordinat düzleminde oluşan taralı bölge eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini göstermektedir.

Analitik düzlemde $(1, -2)$ noktası

$$2x - 3y > a$$

$$3x - y < a$$

eşitsizlik sistemini sağlayan bölgede bulunduğuna göre, a nın değer aralığını bulalım.

Çözüm

(1, –2) sıralı ikilisini eşitsizlik sisteminde yerine koyalım:

$2x - 3y > a$ ise $2 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) > a$

$8 > a$ olur.

$3x - y < a$ ise $3 \cdot 1 - (-2) < a$

$5 < a$

Buna göre, her iki eşitsizliği sağlayan a değerlerinin aralığı

$5 < a < 8 = (5, 8)$ olur.

a) $|x-a|+|y-b|=c,\ (c \geq 0)$ şeklindeki iki bilinmeyenli denklemler analitik düzlemde (a,b) merkezli bir kenarı $c\sqrt{2}$ birim olan bir kare belirtir.

b) $|x-a|+|y-b|<c,\ (c \geq 0)$ şeklindeki iki bilinmeyenli eşitsizlik analitik düzlemde (a,b) merkezli bir kenarı $c\sqrt{2}$ birim olan bir karenin iç bölgesini belirtir.

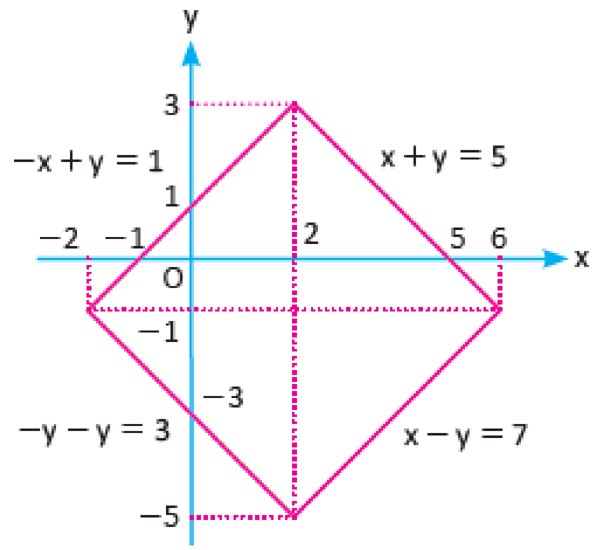
c) $|x-a|+|y-b|>c,\ (c \geq 0)$ şeklindeki iki bilinmeyenli eşitsizlik analitik düzlemde (a,b) merkezli bir kenarı $c\sqrt{2}$ birim olan bir karenin dış bölgesini belirtir.

$|x-2|+|y+1|=4$ denklemini sağlayan (x,y) ikililerinin kümesini analitik düzlemde gösteriniz.

ÇÖZÜM

$|x-2|$ nin kritik noktası 2 dir. $|y+1|$ in kritik noktası -1 dir. Bu durumda oluşacak dört farklı durum aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

I. Durum	$x \geq 2,\ y \geq -1$	$x-2+y+1=4$	$x+y=5$
II. Durum	$x \geq 2,\ y \leq -1$	$x-2-y-1=4$	$x-y=7$
III. Durum	$x \leq 2,\ y \leq -1$	$-x+2-y-1=4$	$-x-y=3$
IV. Durum	$x \leq 2,\ y \geq -1$	$-x+2+y+1=4$	$-x+y=1$



Bu durumun birleşimi $|x-2|+|y+1|=4$ denkleminin düzlemdeki görüntüsüdür.

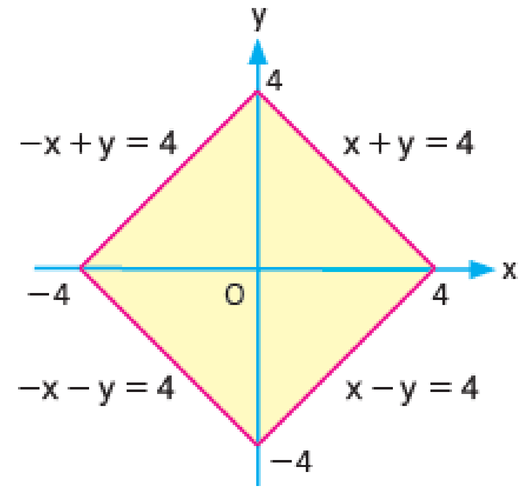
Elde edilen şekil köşegenlerinin kesişim noktası $(2,-1)$ ve bir kenarının uzunluğu $4\sqrt{2}$ birim olan bir karedir.

$$\left.\begin{array}{r} |x|+|y| \leq 4 \\ |x+1| < 2 \end{array}\right\}$$ eşitsizlik sistemini sağlayan (x, y) ikililerinin kümesini analitik düzlemde gösteriniz.

ÇÖZÜM

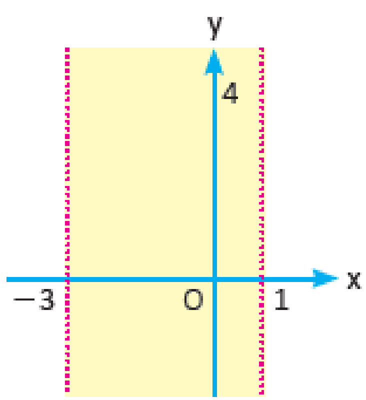
1. $|x|+|y| \leq 4$ eşitsizliğinde mutlak değer tanımına göre aşağıdaki dört durum oluşur:

I. Durum	$x \geq 0,\ y \geq 0$ için	$x+y \leq 4$
II. Durum	$x \leq 0,\ y \geq 0$ için	$-x+y \leq 4$
III. Durum	$x \leq 0,\ y \leq 0$ için	$-x-y \leq 4$
IV. Durum	$x \geq 0,\ y \leq 0$ için	$x-y \leq 4$

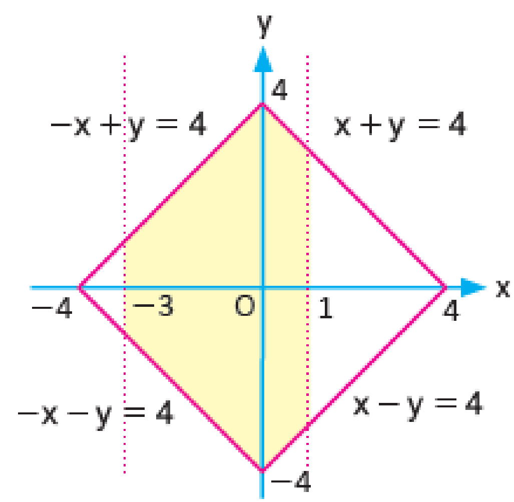


2. $|x+1| < 2 \Rightarrow -2 < x+1 < 2 \Rightarrow -3 < x < 1$

$|x|+|y| \leq 4$ eşitsizliğinin çözüm bölgesi, bu dört durumun birleşimi ile elde edilen karenin sınırı ve iç bölgesidir.



(1) ve (2) bölgelerinin analitik düzlemdeki kesişim bölgesi eşitsizlik sisteminin çözümüdür.



ALIŞTIRMALAR:

Örnek

x ve y değişkenlerine bağlı

$$ax + by = 5$$

$$ay - bx = 3$$

denklem sisteminin çözüm kümesi $\{(1, 1)\}$ olduğuna göre, a kaçtır?

Çözüm

Ç.K. = {(1, 1)} olduğundan

$x = 1$ ve $y = 1$ için denklemler sağlanır.

$$
\begin{array}{rl}
 & a + b = 5 \\
+ & a - b = 3 \\
\hline
 & 2a = 8 \Rightarrow a = 4 \quad \text{bulunur.}
\end{array}
$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{3}{y+1} = 5 \\[2ex] \dfrac{-1}{x+1} + \dfrac{8}{y+1} = -2 \end{array}\right\}$$ denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

Verilen denklem sistemi 2 bilinmeyenli ancak birinci dereceden değildir. Bu tip denklem sistemlerinin çözümü yok etme veya yerine koyma yöntemi ile çözülebilir.

$$\begin{array}{r} \dfrac{2}{x+1}-\dfrac{3}{y+1}=5 \\ +\ 2/\quad \dfrac{-1}{x+1}+\dfrac{8}{y+1}=-2 \\ \hline \end{array}$$

$\dfrac{13}{y+1}=1 \Rightarrow y+1=13 \Rightarrow y=12$ Birinci denklemde $y=12$ yazılırsa

$$\frac{2}{x+1}-\frac{3}{13}=5 \Rightarrow \frac{2}{x+1}=5+\frac{3}{13} \Rightarrow \frac{2}{x+1}=\frac{68}{13}$$

$\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{13}{68} \Rightarrow x=-\dfrac{21}{34}$ bulunur. Çözüm kümesi $Ç=\left\{\left(-\dfrac{21}{34},12\right)\right\}$ dir.

Örnek

$$ax - 3y + 2 = 0$$

$$2x + by - 4 = 0$$

denklem sisteminin x ve y değişkenlerine bağlı sonsuz çözümü olduğuna göre, $a + b$ toplamı kaçtır?

Sistemin sonsuz çözümü olduğundan

$$\frac{a}{2} = \frac{-3}{b} = \frac{\cancel{2}^{\,1}}{\cancel{-4}_{\,-2}}$$

$$\frac{a}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = -1$$

$$-\frac{3}{b} = -\frac{1}{2} \Rightarrow b = 6 \text{ dır.}$$

$\Rightarrow$ $a + b = -1 + 6 = 5$ bulunur.

$$2x - 3y + a = 0$$

$$-4x + 6y + 2 = 0$$

denklem sisteminin çözüm kümesi boş küme olduğuna göre, a kaç olamaz?

$2x - 3y + a = 0$

$-4x + 6y + 2 = 0$ denklem sisteminin çözüm kümesi boş küme

$\Rightarrow \dfrac{2}{-4} = \dfrac{-3}{6} \neq \dfrac{a}{2}$

$\Rightarrow -\dfrac{1}{2} \neq \dfrac{a}{2}$

$\Rightarrow a \neq -1$ bulunur.

a bir gerçek sayıdır.

$$2x + 4y + 1 = 0$$

$$3x + ay + 2 = 0$$

denklem sisteminin tek çözümü olduğuna göre,

a kaç olamaz?

$2x + 4y + 1 = 0$

$3x + ay + 2 = 0$ denklem sisiteminin tek çözümü olduğuna göre,

$$\frac{2}{3} \neq \frac{4}{a}$$

$\Rightarrow a \neq 6$ bulunur.

$$(a - 2b - 3)x + (2a + b + 4)y = 0$$

denklemi $\forall (x, y) \in R$ için sağlanıyorsa b kaçtır?

Çözüm

$m.x + n.y = 0$ denklemi $\forall\,(x, y) \in R$ için sağlanıyorsa

$m = n = 0$ olmalıdır.

$$\underbrace{(a - 2b - 3)}_{0}x + \underbrace{(2a + b + 4)}_{0}y = 0$$

$$\begin{array}{rl} ^{-2}/ & a - 2b = 3 \\ + & 2a + b = -4 \\ \hline & 5b = -10 \Rightarrow b = -2 \quad \text{bulunur.} \end{array}$$

$$(a - 2b + 5)^2 + (2b - a + c)^2 = 0$$

denklemine göre, c kaçtır?

Çözüm

$a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = 0$ ve $b = 0$ olmalıdır.

$$(\underbrace{a - 2b + 5}_{0})^2 + (\underbrace{2b - a + c}_{0})^2 = 0$$

$$\begin{array}{rl} & \cancel{a} - \cancel{2b} + 5 = 0 \\ + & \cancel{2b} - \cancel{a} + c = 0 \\ \hline & c + 5 = 0 \Rightarrow c = -5 \end{array}$$

bulunur.

$$x - y = 2$$

$$2x + y = 7$$

denklem sisteminin çözüm kümesini analitik düzlemde çizerek bulunuz.

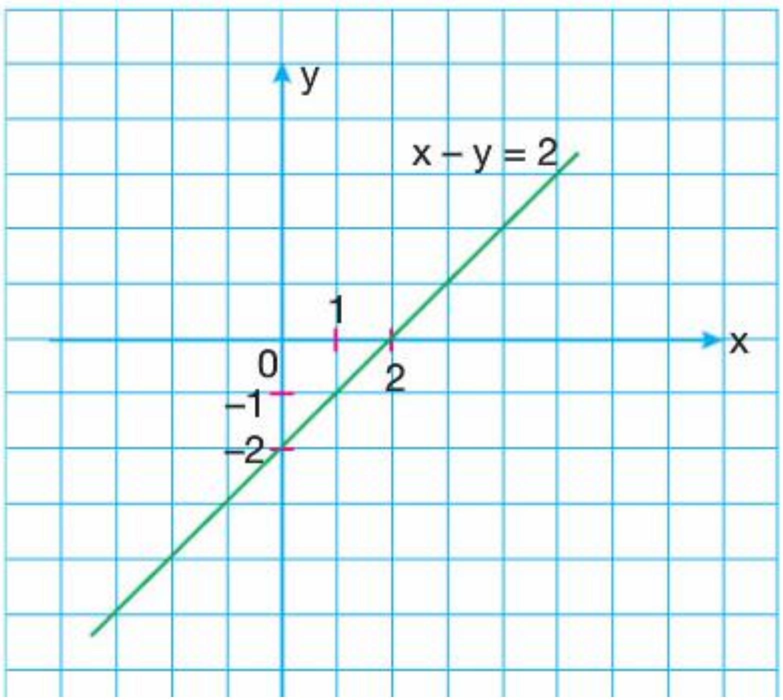
Çözüm

$x - y = 2$ ve $2x + y = 7$ doğrularını çizelim.

Önce, $x - y = 2$ doğrusunu çizelim.

$x = 0$ için $y = -2$ olur. $(0, -2)$

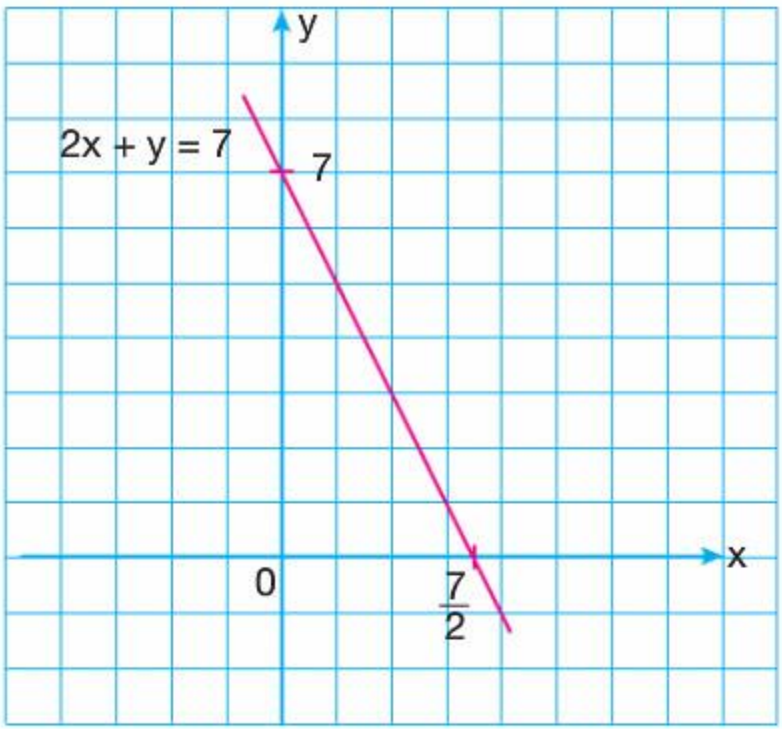
$y = 0$ için $x = 2$ olur. $(2, 0)$



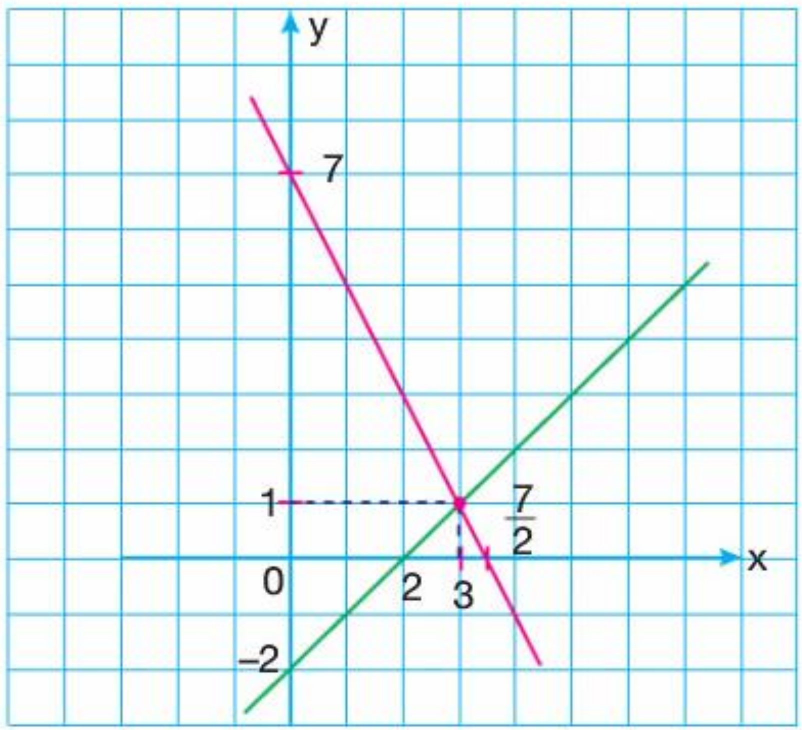
$2x + y = 7$ doğrusunu çizelim.

$x = 0$ için $y = 7$ olur. $(0, 7)$

$y = 0$ için $x = \frac{7}{2}$ olur. $\left(\frac{7}{2}, 0\right)$



Çizdiğimiz doğru grafiklerini bir analitik düzlemde birleştirelim.



$$x - y = 2$$
$$2x + y = 7$$

Ortak çözümleri
Yok etme metodu ile x=3 ve y=1 bulunur.

Yukarıdaki şekilde doğruların keşistiği A(3, 1) noktası denklem sisteminin köküdür.

Örnek

$$2x - 3y - 6 < 0$$

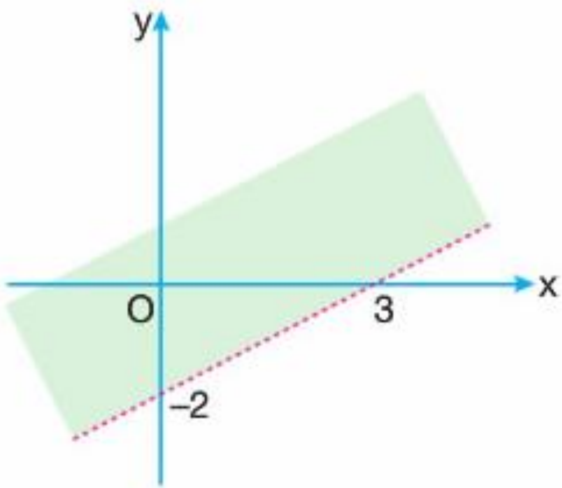
eşitsizliğinin belirttiği açık yarı düzlemi analitik düzlemde gösteriniz.

Çözüm

$2x - 3y - 6 = 0$ denklemi ile verilen doğruyu çizelim.

$x = 0$ için $y = -2$ olur. $(0, -2)$

$y = 0$ için $x = 3$ olur. $(3, 0)$



Görüldüğü gibi d doğrusu düzlemi iki bölgeye ayırmıştır. Eşitsizliği hangi tarafın sağladığını bulmak için $(0, 0)$ noktasını kontrol edelim.

$2x - 3y - 6 < 0 \Rightarrow -6 < 0$ *(eşitsizlik sağlanıyor.)*

Dolayısıyla $(0, 0)$ noktasının olduğu bölge alınır.

Örnek

$$x + y + 2 < 0$$

$$y - x + 1 \geq 0$$

eşitsizliklerini sağlayan bölgeyi bulunuz.

Çözüm

$y - x + 1 = 0$ doğrusunu çizelim.

$x = 0$ için

$y = -1 \Rightarrow (0, -1)$

$y = 0$ için

$x = 1 \Rightarrow (1, 0)$

$(0, 0)$ noktasını $y - x + 1 \geq 0$ eşitsizliğinde yerine koyarsak

$0 - 0 + 1 \geq 0 \Rightarrow 1 \geq 0$ sağladığı için $(0, 0)$ noktasının bulunduğu bölge $y - x + 1 \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesidir.

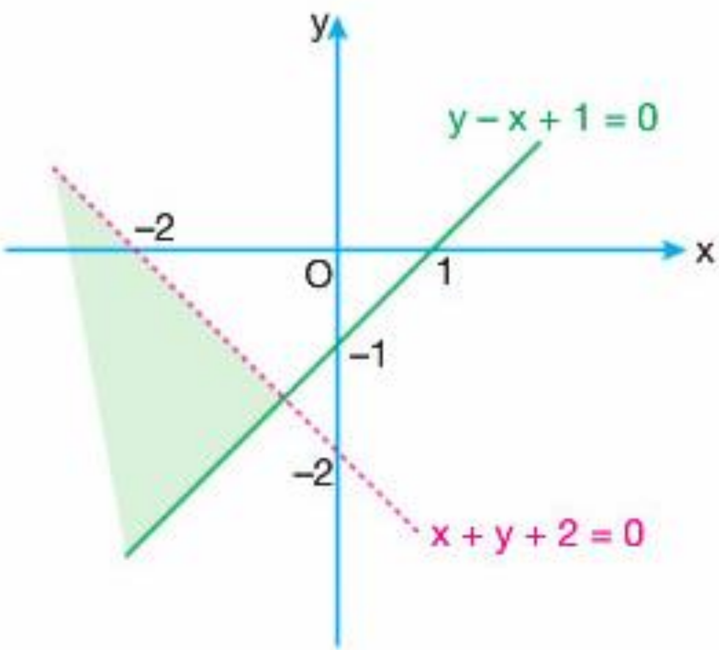
$x + y + 2 = 0$ doğrusunu çizelim.

$x = 0$ için $\Rightarrow y = -2 \Rightarrow (0, -2)$

$y = 0$ için $\Rightarrow x = -2 \Rightarrow (-2, 0)$

$(0, 0)$ noktasını $x + y + 2 < 0$ eşitsizliğinde yerine koyarsak

$0 + 0 + 2 < 2 \Rightarrow 2 < 0$ sağlamadığı için $(0, 0)$ noktasının bulunmadığı bölge $x + y + 2 < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesidir.



Her iki eşitsizliğin ortak bölgesi,

$x + y + 2 < 0$ ve

$y - x + 1 \geq 0$ eşitsizliklerini sağlayan bölgedir.